

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Московский физико-технический институт  
(государственный университет)

Кафедра молекулярной физики

## ВВЕДЕНИЕ В НАНООПТИКУ

Составитель:  
*Лисица Валерий Степанович*

МОСКВА  
МФТИ  
2012

УДК 544.3

**Введение в нанооптику.** / Сост. Лисица В. С. – М.:  
МФТИ, 2012, - с.

**УДК 544.3**

© Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего профессионального образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)», 2012

## Содержание

Глава 1. Введение. Предмет нанооптики .....	4
Глава 2. Плазменные возбуждения в объеме. Плазмоны и поляритоны .....	9
Глава 3. Взаимодействие атомных структур с электромагнитными полями .....	17
Глава 4. Электромагнитное излучение в среде .....	42
Глава 5. Спектроскопия ближнего поля .....	67
Глава 6. Поверхностные плазмоны .....	97
Глава 7. Метаматериалы .....	123
Литература .....	151

# **ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДМЕТ НАНООПТИКИ.**

## **1.1. Источники электромагнитного излучения в нанодиапазоне**

Оптические методы являются одними из наиболее эффективных и развитых средств исследования свойств различных состояний вещества. Классическими направлениями исследований являются оптические методы, развитые для видимой области спектра. В последние десятилетия новыми источниками излучения в видимой (а также инфракрасной) области являются лазерные источники излучения, характеризующиеся двумя основными параметрами – когерентностью излучения и его высокой интенсивностью. Когерентность позволяет получить высококонтрастные изображения объектов, тогда как высокая интенсивность приводит к нелинейным по лазерному полю эффектам во взаимодействии излучения с веществом и открывает новые возможности исследований, являющиеся предметом нелинейной лазерной спектроскопии. Длины волн, отвечающие видимой или инфракрасной областям спектра, составляют величины 3000 – 10000 ангстрем (Å), или 300–1000 нм

В последние годы особый интерес представляет исследование нанобъектов, размеры которых малы по сравнению с длиной волны видимого света ( $1\text{ нм} = 10^{-9}\text{ м} = 10^{-7}\text{ см} = 10\text{ Å}$ ).

Существует два пути использования оптических методов при исследовании таких объектов. Первый путь связан с уменьшением длины волны излучения, используемого в экспериментах. Этот путь связан с использованием источников излучения в далекой ультрафиолетовой или рентгеновской области спектра. Эти источники связаны с переходами в атомах или атомарных ионах порядка десятков и сотен электрон-вольт (эВ). К таким источникам можно отнести эксимерные лазеры, работающие на электронных переходах в квазимолекулах, образованных благородными газами и химически активными галогенами (ксенон-фтор, хлор и др.), обеспечивающими длины волн излучения в далекой ультрафиолетовой области (около 200 нм). Другие источники излучения, использующие плазменные среды (лазерная или пинчевая плазма), малоудобны для оптических применений ввиду большой расходимости излучения от этих источников.

Безусловным лидером среди источников рентгеновского излучения является синхротронное излучение, создающееся релятивистскими электронами, движущимися в сильном магнитном поле. Оно характеризуемое высокой интенсивностью, узкой (пучковой) направленностью и малыми длинами волн, способными обеспечить разрешение объектов наномасштабных размеров. Недостатком циклотронного излучения по сравнению с лазерным является отсутствие когерентности. Этот недостаток преодолевается в современных лазерных установках - т.н. лазерах на свободных электронах (ЛСЭ), обеспечивающих когерентность излучения наряду с малой длиной волны и высокой интенсивностью. Несмотря на привлекательность источников излучения синхротронного и ЛСЭ типов, его применение связано с масштабными и энергоемкими установками, доступными в крупных специализированных исследовательских центрах.

## **1.2. Преодоление дифракционного предела в оптическом диапазоне.**

Второй путь в исследовании нанообъектов оптическими методами связан с использованием источников излучения в оптическом диапазоне, но с существенным увеличением волновых векторов электромагнитных колебаний, позволяющих достичь пространственного разрешения наномасштабного диапазона. Такое увеличение волновых векторов достигается не за счет увеличения частоты излучения, а за счет использования дисперсионных свойств среды, в которой распространяется излучения. Такими свойствами обладают эванесцентные (затухающие) волны на границах раздела сред. Здесь волна, затухающая в одном направлении, может обладать значительно увеличенным значением волнового вектора в другом направлении. Тем самым преодолевается дифракционный предел, определяемый «соотношением неопределенности» между волновым вектором и пространственным масштабом:

$$\Delta x \geq \frac{1}{2 \Delta k_x},$$

где оба значения неопределенностей отвечают проекциям на одно и то же направления распространения волны. Если в другом направлении волна затухает, то соответствующее ей значение волнового вектора становится мнимым, что позволяет увеличить его значение в

заданном направлении и тем самым уменьшить масштаб пространственного разрешения (подробнее см. ниже). Таким образом, открывается возможность наблюдения пространственных масштабов, меньших длины световой волны в вакууме, путем использования различной геометрии сред, в которой распространяется световая волна. Использование затухающих (эванесцентных) волн является одной из основ нанооптики.

Как уже следует из названия, нанооптика изучает электромагнитные взаимодействия на нанометровом масштабе длин с целью использования специфики этих взаимодействий в широком спектре приложений и фундаментальных задач.

Перечислим здесь составные компоненты этой дисциплины. Во-первых, нанооптика изучает особенности взаимодействия света с нанообъектами, т.е. частицами вещества с диаметром от единиц до сотни нанометров. Здесь принципиально важным обстоятельством является тот факт, что на указанных размерах появляется зависимость оптических свойств среды от размера и формы образца. В случае полупроводниковых нанокристаллов эта зависимость связана с изменением ширины запрещенной зоны в спектре элементарных оптических возбуждений по мере изменения диаметра нанокристалла. Во-вторых, для нанооптики важны специфические типы взаимодействий между нанообъектами, такие как передача энергии по Ферстеру, связанные возбуждения (экситоны) и силы Ван-дер-Ваальса/Казимира. Еще одна составная часть нанооптики связана с резонансными явлениями: плазмонами, поверхностными плазмонами-поляритонами, микрорезонаторами.

В нанооптических приложениях принципиальную роль играет возможность получения сильно-сфокусированного света, что используется в конфокальной микроскопии и многофотонной микроскопии. Фундаментальную роль в нанооптике играет, как отмечалось выше, возможность преодоления классического дифракционного предела, сформулированного Рэлеем, который устанавливает границы разрешающей способности традиционных оптических приборов. Как известно, этот критерий выражается неравенством:

$$\Delta x \geq \frac{0,61 \lambda}{NA}, \quad (1.1)$$

где  $\Delta x$  – разрешаемое расстояние,  $\lambda$  – длина волны излучения,  $NA$  – числовая апертура (произведение показателя преломления среды на

синус апертурного угла), равная примерно 1.3 – 1.4 для современных объективов. Для понимания нанооптических методов, позволяющих увеличить разрешающую способность, полезно получить аналог неравенства (1.1) с помощью соотношения неопределенностей Гейзенберга. Учитывая известную связь между импульсом и волновым вектором излучения  $p_x = \hbar k_x$ , соотношение неопределенностей можно записать в виде

$$\Delta x \geq \frac{1}{2 \Delta k_x}, \quad (1.2)$$

где  $\Delta k_x$  – разброс  $x$ -й проекции волнового вектора. Из неравенства (1.2) следует, что для минимизации разрешаемого расстояния необходимо иметь максимальный разброс соответствующей проекции волнового вектора излучения, который для излучения в вакууме равен длине волнового вектора  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = 2\pi/\lambda$ . Подставляя последнее равенство в формулу (2), приходим к соотношению, аналогичному критерию Рэлея (1.1). Подчеркнем, что разрешаемое расстояние вдоль заданной декартовой оси определяется согласно (1.2) разбросом проекции волнового вектора на ту же самую ось. Таким образом, если в выражение для модуля волнового вектора подставить чисто мнимые компоненты волнового вектора по осям  $y$  и  $z$ , тогда для заданной длины волны можно увеличить значение  $\Delta k_x$ , уменьшив тем самым минимально возможное разрешаемое расстояние по оси  $x$ . Предположим, что излучение распространяется вдоль оси  $z$ , тогда проекция волнового вектора на ось  $y$  равна нулю, а предполагаемая мнимость  $k_z$  означает, что плоская волна излучения экспоненциально затухает. Такие волны называются эванесцентными (evanescent – приближающийся к нулю). Они реализуются, например, при прохождении излучения через апертуру с радиусом, меньшим длины волны излучения. Как показал Г.А.Бете, коэффициент пропускания в этом случае пропорционален  $(d/\lambda)^4$ , где  $d$  – диаметр апертуры (без учета возбуждения поверхностных плазмонов – см. Главу 4).

Таким образом, мы приходим к принципиально важному выводу о том, что при распространении излучения в неоднородном пространстве рэлеевский предел (1.1) для разрешаемого расстояния, вообще

говоря, не выполняется, и, в принципе, возможно существенно увеличить разрешающую способность оптического прибора, что и реализуется на практике методами нанооптики. Формирование изображения с помощью эванесцентных волн лежит в основе микроскопии ближнего поля, впервые предложенной в 1928 году ирландским ученым E.H.Synge. Любопытно, что его статья попала на рецензию к А.Эйнштейну, который дал в целом положительный отзыв, указав при этом на трудности экспериментального воплощения идеи Synge. Цитируемый автор предложил использовать отверстие малого диаметра в непрозрачной пластине, освещаемое с одной стороны источником света и расположенное вплотную к исследуемому образцу. Свет, прошедший через отверстие и образец, собирается микроскопом и регистрируется фотоприемником. Отверстие перемещается вдоль поверхности образца без соприкосновения. Таким образом, удастся получить изображение поверхности вне рамок дифракционного предела.

Таким образом, предметом изучения нанооптики являются дисперсионные свойства электромагнитных волн, распространяющихся в сильно неоднородных средах. Принципиальным здесь является неоднородный характер эффектов и их зависимость от геометрии сред, в которых происходит распространение волн. Увеличение величин волновых векторов таких волн приводит к возможности обмена импульсами между электромагнитными колебаниями и частицами среды – электронами твердого тела (металлов). Такой обмен приводит к появлению плазменных колебаний на поверхности твердого тела – т.н. поверхностных плазмонов. Своеобразием этих колебаний является их тесная связь с электромагнитными колебаниями, приводящая к новым типам квазичастиц – фотон-плазмон.

Важным направлением нанооптики является изучения взаимодействия электромагнитных колебаний с нанообъектами, включая атомы и молекулы окружающей среды. Принципиальным моментом здесь является то, что взаимодействие колебаний с нанообъектами происходит на расстояниях значительно меньших длины световой волны, в т.н. ближней зоне, в отличие от обычной оптики, где поле световой волны исследуется на расстояниях, значительно превышающих длину волны – в т.н. волновой зоне. Такое направление исследований называется спектроскопией ближнего поля.

Нанооптика имеет широкий круг приложений, связанный с исследованиями нанообъектов. К ним относятся нанодетекторы, позволяющие исследовать структуру различных объектов наномасштабов,



включая биологические молекулы, расшифровку структуры генома и многое другое. Важным направлением является также создание материалов с необычными свойствами в отношении распространения электромагнитных волн – т.н. метаматериалов. Эти материалы не существуют в природе и создаются искусственно, путем нанесения специальной структуры на поверхности объектов с целью придать им требуемые оптические свойства. В частности, возможно реализовать такие условия, при которых объект становится невидимым в оптическом диапазоне.

Предметом настоящего курса является введение в нанооптику, включающее в себя как изложение свойств электромагнитных колебаний в различных средах, так и их взаимодействие с атомарными и другими наноструктурами.

Таким образом, предметом рассмотрения в настоящем руководстве являются следующие вопросы: 1) характер объемных плазменных колебаний в проводящей и диэлектрической средах; 2) взаимодействие электромагнитных полей с атомными и наноструктурами; 3) структура электромагнитного поля в среде; 4) спектроскопия электромагнитного поля на расстояниях, малых по сравнению с длиной световой волны видимого диапазона (ближнего поля); 5) плазменные колебания на границе раздела сред, свойства поверхностных плазмонов; 6) свойства новых метаматериалов, обладающих отрицательными показателями преломления.

Материал данного курса основан как на обзорах, так и оригинальных статьях.

Изложение материала основано на знании основного курса общей физики и рассчитано на студентов 3-5 курса.

## **ГЛАВА 2. ПЛАЗМЕННЫЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ В ОБЪЕМЕ. ПЛАЗМОНЫ И ПОЛЯРИТОНЫ**

### **2.1. Квазичастицы в плазме**

Простейшим примером электрон-фотонного возбуждения в объеме вещества является *плазмон*, который представляет собой связанное колебание электронного заряда и продольного электрического поля. Под продольным полем понимается поле, волновой вектор в котором параллелен вектору напряженности.

В продольной электромагнитной волне магнитное поле отсутствует, так что остается только электрическое.

Как следует из уравнений Максвелла, закон дисперсии продольной электрической волны в веществе определяется уравнением [1]

$$\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = 0, \quad (2.1)$$

где  $\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})$  – продольная часть диэлектрической проницаемости среды на частоте  $\omega$  и волновом векторе  $\mathbf{k}$ . Напомним, что законом дисперсии называется связь между частотой волны и ее волновым вектором  $\omega = \omega(\mathbf{k})$ . Эта связь, которая может быть получена на основании решения уравнения (2.1), определяет основные характеристики волны, в частности, ее фазовую  $v = \omega/k$  и групповую  $u = \partial\omega/\partial k$  скорость. Таким образом, для определения основных свойств плазменных необходимо знать явный вид функции  $\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})$ .

В случае максвелловской изотропной плазмы функция  $\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})$  при  $\omega > k v_{Te}$  (высоочастотный предел) дается выражением

$$\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega \omega_{pe}^2}{k^3 v_{Te}^3} \exp \left\{ -\frac{\omega^2}{2k^2 v_{Te}^2} \right\}, \quad (2.2)$$

где  $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m_e}$  – электронная плазменная частота ( $n_e$ ,  $m_e$  – концентрация и масса электрона),  $v_{Te} = \sqrt{3T_e / m_e}$  – тепловая скорость электронов ( $T_e$  – электронная температура в энергетических единицах). Мнимая часть диэлектрической проницаемости (2.2) описывает затухание электрического поля, она мала в пределе  $\omega \gg k v_{Te}$ . В силу изотропии плазмы правая часть равенства (2.2) зависит только от модуля волнового вектора  $k = |\mathbf{k}|$ .

В нулевом приближении по отношению  $k v_{Te} / \omega$  равенство (2.2) сводится к формуле  $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$ , известной из элементарного

курса общей физики. Подставляя это выражение в уравнение (3.1), получаем простой закон дисперсии  $\omega > k v_{Te}$ :

$$\omega_{pl} = \omega_{pe}, \quad (2.3)$$

т.е. в рассматриваемом приближении частота плазмона вообще не зависит от волнового вектора и соответственно групповая скорость продольного колебания электрического поля равна нулю.

В следующем приближении по вкладу волнового вектора находим

$$\omega_{pl}(k) = \omega_{pe} + \frac{3k^2 v_{Te}^3}{2\omega_{pe}} = \omega_{pe} \left(1 + 3k^2 r_{De}^2 / 2\right), \quad (2.4)$$

где  $r_{De} = v_{Te} / \omega_{pe} = \sqrt{3T_e / 4\pi e^2 n_e}$  – электронный дебаевский радиус, определяющий пространственный масштаб экранировки электрического поля в плазме. В равенстве (2.4) по-прежнему предполагается, что  $\omega_{pl} > k v_{Te}$ , так как в противном случае плазмон быстро затухает.

Поскольку  $\omega_{pl} \approx \omega_{pe}$ , имеется следующее ограничение сверху на модуль волнового вектора плазмона:  $k \leq \omega_{pe} / v_{Te} = r_{De}^{-1}$ . При больших значениях модуля волнового вектора  $k > r_{De}^{-1}$  плазмон «разваливается» на индивидуальные возбуждения электронного заряда в плазме, иными словами, не является хорошо определенной квазичастицей.

Соотношение (2.4) определяет квадратичный закон дисперсии плазменного колебания. Для групповой скорости плазмона из (2.4) имеем:  $u = 3 v_{Te}^2 k / \omega_{pe}$ . Отсюда можно получить эффективную «массу» плазмона  $m_{pl}$ , если определить ее равенством  $m_{pl} = \hbar k / u$ . Тогда имеем  $m_{pl} = \hbar \omega_{pe} / 3 v_{Te}^2 = (\hbar \omega_{pe} / 9 T_e) m_e$ , т.е. эффективная масса плазмона может быть больше или меньше массы электрона в зависимости от величины отношения  $\hbar \omega_{pe} / 9 T_e$ . Это отношение велико для вырожденной электронной плазмы в металле и мало в случае невырожденной идеальной плазмы. Величина энергии плазмонов в металлах, когда продольное электрическое поле связано с электронами проводимости, изменяется в пределах от 4 (у калия) до 18.9 эВ (у бериллия).

В низкочастотном пределе  $\omega < k v_{Te}$  продольная часть диэлектрической проницаемости в первом приближении имеет вид

$$\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2}. \quad (2.5)$$

Видно, что в низкочастотном пределе диэлектрическая проницаемость (в первом приближении) не зависит от частоты, она определяет статическую экранировку поля внешнего заряда в плазме. Как следует из равенства (2.5), эта экранировка существенна ( $\varepsilon_l > 1$ ) для  $k \leq r_{De}^{-1}$ , т.е. для длинноволновых статических полей. Это тот же самый диапазон волновых векторов, в котором плазмоны являются хорошо определенными квазичастицами.

Помимо колебаний электронного заряда в плазме существуют и колебания ионной компоненты, характеризующиеся ионной плазменной частотой  $\omega_{pi} = \sqrt{4\pi n_i e^2 / m_i}$  ( $n_i$ ,  $m_i$  – концентрация и масса ионов). Поскольку  $m_i \gg m_e$ , ясно, что ионная плазменная частота существенно меньше электронной. То же справедливо и для тепловой скорости ионов:  $v_{Ti} = \sqrt{3T_i / m_i} \ll v_{Te}$  ( $T_i$  – ионная температура в энергетических единицах, которая не всегда совпадает с электронной температурой). Ионный радиус Дебая равен  $r_{Di} = v_{Ti} / \omega_{pi} = \sqrt{3T_i / 4\pi e^2 n_i}$ . Поскольку в электронейтральной плазме  $z_i n_i = n_e$  ( $z_i$  – зарядовое число иона), то в случае равенства электронной и ионной температур радиусы Дебая электронной и ионной компонент равны друг другу с точностью до множителя  $\sqrt{z_i}$ .

Рассмотрим частотный диапазон  $\omega \ll \omega_{pe}$ , который для электронной подсистемы плазмы является низкочастотным.

В нем продольная диэлектрическая проницаемость плазмы, учитывающая ионный вклад, имеет вид

$$\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}. \quad (2.6)$$

Здесь второе слагаемое описывает вклад электронной компоненты, а третье – ионной компоненты. В правой части равенства (2.6) опущено мнимое слагаемое, отвечающее затуханию волн, что справедливо при выполнении условия  $k \leq r_{De}^{-1}, r_{Di}^{-1}$ . С использованием диэлектрической проницаемости (2.6) уравнение (2.1) дает следующий закон дисперсии:

$$\omega_{is}(k) = \frac{\omega_{pi} k}{\sqrt{k^2 + r_{De}^{-2}}}, \quad (2.7)$$

описывающий *ионно-звуковую волну*. Это еще один тип плазменных колебаний, включающий в себя осцилляции заряда и продольного электрического поля. Для малых модулей волнового вектора  $k < r_{De}^{-1}$  равенство (2.7) дает

$$\omega_{is}(k) \cong \sqrt{\frac{3z_i T_e}{m_i}} k = v_{is} k, \quad (2.8)$$

т.е. имеем линейный закон дисперсии (рис. 2.1), характерный для звуковых волн, причем величина  $v_{is} = \sqrt{3z_i T_e / m_i}$  играет роль скорости звука. Ясно, что всегда выполняется неравенство:  $v_{is} \ll v_{Te}$ , поэтому ионно-звуковая волна не поглощается плазменными электронами. Отметим, что обмен энергией между волной и частицей эффективен только в случае, если фазовая скорость волны равняется скорости частицы. Поэтому, чтобы не было поглощения ионно-звуковой волны на плазменных ионах, необходимо выполнение неравенства  $v_{is} \ll v_{Ti}$ , т.е. должно быть  $T_e \ll T_i$ .

Для коротковолновых ионно-звуковых волн  $k > r_{De}^{-1}$  из (2.7) следует простое равенство  $\omega_{is}(k) = \omega_{pi}$ , т.е. исчезает зависимость частоты от волнового вектора (горизонтальный участок нижней кривой, рис. 2.1). Для больших значений волнового вектора  $k > r_{Di}^{-1}$  ионно-звуковая волна сильно затухает, переставая быть хорошо определенной квазичастицей.

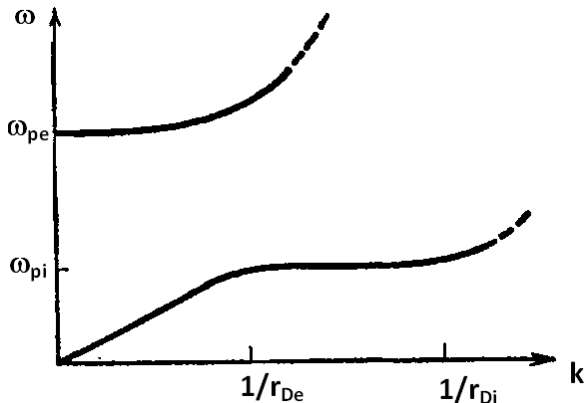


Рис. 2.1. Дисперсионные зависимости для плазмона (верхняя кривая) и для ионно-звуковой волны (нижняя кривая)

## 2.2. Поляритоны в диэлектрике

Рассмотрим теперь другой тип связанного электрон-фотонного возбуждения (или квазичастицы), которое может распространяться в твердом теле. В этом возбуждении, называемом *поляритоном*, вектор напряженности электрического поля перпендикулярен волновому вектору, т.е. соответствующая волна является поперечной. Как известно, в поперечной электромагнитной волне присутствуют оба поля: электрическое и магнитное, причем при распространении в вакууме их амплитуды равны. Этим поляритон отличается от плазмона, с которым связано только продольное электрическое поле.

Из уравнений Максвелла следует следующий закон дисперсии для поперечной электромагнитной волны:

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{tr}(\omega, \mathbf{k}), \quad (2.9)$$

где  $\varepsilon_{tr}(\omega, \mathbf{k})$  – поперечная часть диэлектрической проницаемости среды, зависящая от частоты (частотная дисперсия) и волнового вектора (пространственная дисперсия). Ясно, что, как и в случае продольной волны, для определения закона дисперсии поперечного электромагнитного возмущения необходимо знать явный вид функции

$\varepsilon_{tr}(\omega, \mathbf{k})$ , который, вообще говоря, неизвестен. Поэтому воспользуемся модельной диэлектрической проницаемостью вещества следующего вида:

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} + \frac{f_0 \omega_{pc}^2}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.10)$$

Модель (2.10) предполагает, что основной частотно-зависимый вклад в диэлектрическую проницаемость дает одно квантовое возбуждение среды с собственной частотой  $\omega_0$  и силой осциллятора  $f_0$ . Это возбуждение может быть связано, например, с электронным переходом в примесных центрах, концентрация которых  $N_c$  определяет плазменную частоту, фигурирующую в правой части равенства (2.10):

$\omega_{pc} = \sqrt{4\pi e^2 N_c / m_e}$ . Не зависящее от частоты слагаемое  $\varepsilon_{\infty}$  связано с вкладом в диэлектрическую проницаемость основного вещества. В модели (2.10) пренебрежено пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости, что оправдано для случая примесного центра в твердом теле, размер которого много меньше, чем длина волны рассматриваемого возбуждения.

Решение уравнения (2.9) с диэлектрической проницаемостью (2.10) дает две дисперсионные зависимости для поперечных электромагнитных волн в среде:

$$\omega_{tr}^{(+)}(k) = \frac{k \tilde{c}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{\omega}}{k \tilde{c}}\right)^2 + \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\tilde{\omega}}{k \tilde{c}}\right)^2\right)^2 - \left(\frac{2\omega_0}{k \tilde{c}}\right)^2}}, \quad (2.11)$$

$$\omega_{tr}^{(-)}(k) = \frac{k \tilde{c}}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{\omega}}{k \tilde{c}}\right)^2 - \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\tilde{\omega}}{k \tilde{c}}\right)^2\right)^2 - \left(\frac{2\omega_0}{k \tilde{c}}\right)^2}}, \quad (2.12)$$

где  $\tilde{c} = c / \sqrt{\varepsilon_{\infty}}$  и  $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 + (f_0 / \varepsilon_{\infty}) \omega_{pc}^2}$ .

Графики функций (2.11) – (2.12) приведены на рис. 2.2 для сле-

дующих значений параметров:  $N_c = 10^{20} \text{ см}^{-3}$ ,  $\varepsilon_\infty = 1,96$ ,  $f_0 = 0,5$ ,  $\hbar\omega_0 = 0,4 \text{ эВ}$ , тогда  $\hbar\omega_{pc} = 0,37 \text{ эВ}$  и  $\hbar\tilde{\omega} = 0,44 \text{ эВ}$ .

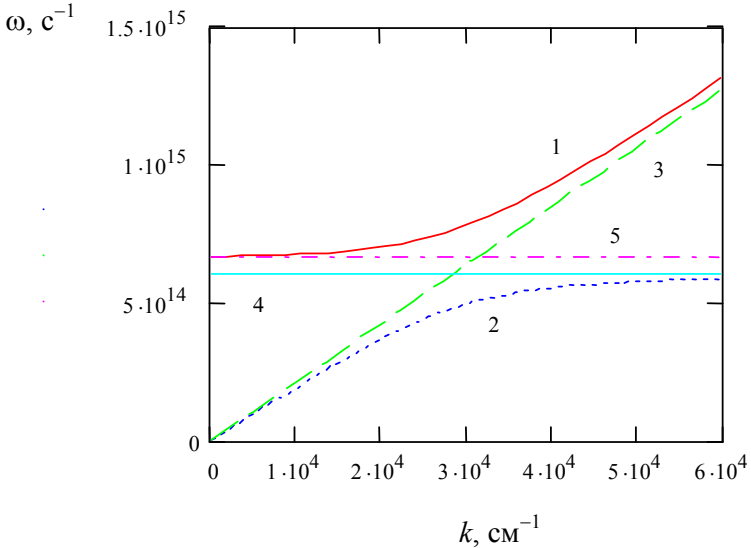


Рис. 2.2. Дисперсия поперечных волн в среде при наличии одного квантового возбуждения: 1 –  $\omega_{tr}^{(+)}(k)$ ; 2 –  $\omega_{tr}^{(-)}(k)$ ; 3 –  $\tilde{c}k$ ; 4 –  $\omega_0$ ; 5 –  $\tilde{\omega}$ .

Из рис. 2.2 видно, что асимптотами дисперсионных кривых являются прямые 3, 4 и 5. Зависимость 3 представляет собой линейный закон дисперсии в среде без квантового возбуждения. Линия 4 описывает квантовое возбуждение среды и не зависит от волнового вектора излучения. Наконец, прямая 5 соответствует частоте  $\tilde{\omega}$ , которая включает в себя эффект перенормировки энергии квантового возбуждения среды за счет взаимодействия с электромагнитным полем. Чем больше это взаимодействие, пропорциональное разности  $\tilde{\omega} - \omega_0$ , тем сильнее отличие дисперсионных кривых от ломаных прямых линий.

Таким образом, законы дисперсии поперечных электромагнитных волн (2.11) – (2.12) описывают макроскопическое электромагнитное поле, связанное с квантовым возбуждением среды.

Существенно, что групповая скорость поляритона на верхней



дисперсионной ветви стремится к нулю с уменьшением волнового вектора, а групповая скорость на нижней дисперсионной кривой стремится к нулю в пределе больших волновых векторов (см. рис. 2.2). Это говорит о том, что верхняя кривая в пределе малых длин волн описывает фотон в среде, а в пределе длинных волн – возбуждение примесного центра. Нижняя кривая, наоборот, для больших длин волн отвечает фотону в среде, а для малых длин волн соответствует возбуждению примесного центра.

Важно отметить, что в частотном интервале  $\omega_0 < \omega < \tilde{\omega}$  распространяющееся макроскопическое поле отсутствует, поскольку в нем диэлектрическая проницаемость среды отрицательна. Таким образом, промежуток  $\omega_0 < \omega < \tilde{\omega}$  может быть назван *поляритонной запрещенной зоной* по аналогии с энергетическим спектром электронов в твердом теле.

## ГЛАВА 3. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ АТОМНЫХ СТРУКТУР С ЭЛЕКТРМАГНИТНЫМИ ПОЛЯМИ

### 3.1. Полуклассическая теория Бора

Исследование взаимодействия электромагнитного излучения с атомами началось с регистрации спектров атома водорода. В результате обобщения экспериментальных данных в 1885 году было получено простое соотношение, с высокой степенью точности описывающее измеренные к тому времени значения длин волн  $\lambda_{mn}$  атома водорода (формула Бальмера):

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = R \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right), \quad (3.1)$$

где  $m$  и  $n$  – целые числа ( $m < n$ ),  $R \cong 109739 \text{ см}^{-1}$  – постоянная Ридберга. В зависимости от величины целого числа  $m$  водородный спектр разделяется на несколько спектральных серий. Так, значению  $m=1$  соответствует серия Лаймана (обозначение серии  $L_n$ ,  $n \geq 2$ ), длины волн которой лежат в ультрафиолетовой области. Если  $m=2$ , то говорят о серии Бальмера ( $H_n$ ,  $n \geq 3$ ), относящейся к видимому

излучению. Наконец, если  $m = 3$ , то формула (3.1) описывает серию Пашена, лежащую в инфракрасном диапазоне, в котором лежат также серия Брэкета ( $m = 4$ ) и серия Пфунда ( $m = 5$ ). Спектральные диапазоны серий Лаймана и Бальмера не пересекаются с другими, спектральные диапазоны серий Пашена, Брэкета и Пфунда имеют пересечение.

Формула Бальмера (3.1) стала важным экспериментальным основанием для построения теории атома водорода и установления основных закономерностей взаимодействия электромагнитного излучения с атомами.

Создание соответствующей теории, однако, натолкнулось на непреодолимые в рамках классической физики трудности. После проведения Резерфордом своих знаменитых опытов по рассеянию альфа-частиц (1911 г.) в теории атома господствовала планетарная модель. Согласно этой модели атом состоит из тяжелого положительно заряженного ядра, расположенного в центре, и отрицательно заряженных электронов, вращающихся вокруг ядра. Классическая электродинамика предсказывала, что в таком случае ускоренно двигающиеся электроны должны излучать электромагнитные волны, терять энергию и, в конечном счете, упасть на ядро. Таким образом, классическая физика не только была не в состоянии объяснить экспериментальную формулу (3.1), но и само существование стабильных атомов с ее точки зрения оказывалось невозможным.

Чтобы преодолеть указанные трудности, Н. Бор в 1913 году построил свою теорию атома водорода (атом Бора), основываясь на трех сформулированных им постулатах.

1. Электроны в атомах находятся в особых, стационарных состояниях  $|n\rangle$ , соответствующих круговым орбитам, параметры которых определяются условием квантования момента количества движения:

$$M_n = n \hbar. \quad (3.2)$$

2. В стационарных состояниях атомные электроны не излучают.
3. Излучение и поглощение электромагнитных волн происходит в результате перехода атомного электрона из одного стационарного состояния (с энергией  $E_n$ ) в другое стационарное

состояние (с энергией  $E_m$ ). Круговая частота излучения (в случае  $E_n > E_m$ ) равна

$$\omega_{mn} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}. \quad (3.3)$$

Стоит отметить, что в условие квантования момента количества движения (3.2) вошла постоянная Планка, использовавшаяся впервые для квантования энергии радиационного осциллятора.

Постулаты Бора так же, как и квантование энергии осциллятора в теории теплового излучения, являлись чужеродной вставкой, противоречащей мировоззренческим основам классической физики. Тем не менее так же, как и в случае теплового излучения, положения, введенные в теорию исключительно для согласования с опытом, не только позволили объяснить имеющиеся к тому времени экспериментальные данные, но и стали своего рода «зародышем» новой, квантовой физики.

Для определения энергии электрона в атоме Бора, помимо условия квантования момента количества движения (3.2), используется второй закон Ньютона для движения электрона по круговой орбите под действием кулоновской силы притяжения к ядру. В результате получается следующая система алгебраических уравнений:

$$m_e r_n v_n = n \hbar, \quad (3.4)$$

$$m_e \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{Z e^2}{r_n^2}, \quad (3.5)$$

где  $v_n$  и  $r_n$  – подлежащие определению скорость электрона на  $n$ -й орбите и радиус  $n$ -й орбиты,  $m_e$  – масса электрона. При записи уравнения (3.5) было использовано выражение для центростремительного ускорения, а также предположено, что заряд ядра равен  $Z|e|$ . Таким образом, (3.4) – (3.5) описывают *водородоподобный ион*, т.е. атом с произвольным зарядом ядра и одним электроном. Атому водорода, очевидно, соответствует значение  $Z = 1$ . Кроме того, здесь и далее пренебрегаем различием между приведенной массой атома и массой электрона.

Система уравнений (3.4) – (3.5) отражает эклектичность теории атома Бора: уравнение (3.4) является квантовым условием и содержит

постоянную Планка  $\hbar$ , в то время как уравнение (3.5), представляющее собой второй закон Ньютона, имеет чисто классическое происхождение.

Решение системы (3.4) – (3.5) имеет вид

$$v_n = \frac{Z e^2}{n \hbar} = \frac{Z}{n} v_a, \quad v_a = \alpha c \cong 2,188 \cdot 10^8 \text{ см/с}, \quad (3.6)$$

$$r_n = \frac{n^2 \hbar^2}{Z m_e e^2} = \frac{n^2}{Z} a_B, \quad a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \cong 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ см}. \quad (3.7)$$

В формуле (3.6) для скорости электрона на  $n$ -й орбите введена *постоянная тонкой структуры*  $\alpha = e^2/\hbar c \cong 1/137$  – фундаментальная безразмерная константа, характеризующая величину электромагнитного взаимодействия. Из равенств (3.6), в частности, следует, что для умеренных зарядов ядра атомный электрон является нерелятивистской частицей, так что оправдано описание его движения в рамках ньютоновской механики.

Величины  $v_a$  (скорость электрона на первой боровской орбите) и  $a_B$  (боровский радиус) являются соответственно единицей скорости и длины в атомной системе единиц (или системе единиц Хартри), определяемой равенствами:

$$e = m_e = \hbar = 1. \quad (3.8)$$

Система единиц Хартри широко используется в атомных расчетах. Она позволяет существенно упростить аналитические вычисления, поскольку в этой системе не выписываются константы  $e$ ,  $m_e$  и  $\hbar$  в промежуточных формулах, а результат переводится в обычные (размерные) единицы с использованием известных размерных значений атомных единиц. Приведем здесь еще атомную единицу времени:

$$\tau_a = \frac{a_B}{v_a} = \frac{\hbar^3}{m_e e^4} \cong 2,42 \cdot 10^{-17} \text{ с}. \quad (3.9)$$

Обратная к атомной единице времени величина  $\nu_a$  представляет собой атомную единицу частоты, численное значение которой равно:  $\nu_a \cong 4,13 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$ .

Используя полученные выражения (3.6) и (3.7), можно найти кинетическую, потенциальную и полную энергии электрона на  $n$ -й атомной орбите:

$$T_n = \frac{m_e v_n^2}{2} = \frac{Z^2}{2n^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = \frac{Z^2}{2n^2} \alpha^2 m_e c^2, \quad (3.10)$$

$$U_n = -\frac{Z e^2}{r_n} = -\frac{Z^2}{n^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = -\frac{Z^2}{n^2} \alpha^2 m_e c^2, \quad (3.11)$$

$$E_n = T_n + U_n = -\frac{Z^2}{2n^2} \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = -\frac{Z^2}{2n^2} \alpha^2 m_e c^2. \quad (3.12)$$

Правые части в формулах (3.10) – (3.12) представляют собой выражения для энергии атомного электрона на  $n$ -й орбите через энергию покоя электрона и постоянную тонкой структуры. Такая запись явно демонстрирует малость энергии электромагнитного взаимодействия, которая определяется квадратом малой константы  $\alpha$ . Знак минус в выражении для потенциальной энергии (3.11) отражает тот факт, что разноименные заряды электрона и ядра обуславливают силу притяжения и соответственно отрицательность потенциальной энергии. Из равенств (3.10) и (3.11) вытекает соотношение

$$U_n = -2T_n, \quad (3.13)$$

представляющее собой известную из классической механики теорему вириала для системы с потенциальной энергией, обратно пропорциональной расстоянию между частицами.

Единица измерения энергии в системе атомных единиц равна

$$\varepsilon_a = \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = \alpha^2 m c^2 \cong 4.36 \cdot 10^{-11} \text{ эрг} = 27,2 \text{ эВ}. \quad (3.14)$$

Здесь введена внесистемная единица энергии – электронвольт, величина которой соответствует атомному масштабу энергий:  $1 \text{ эВ} \cong 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ эрг}$ . Помимо атомной единицы энергии (3.14), в атомной физике широко используется другая единица энергии – ридберг, определяемая согласно равенству:

$$Ry = \frac{\varepsilon_a}{2} \cong 13,6 \text{ эВ}. \quad (3.15)$$

В этих единицах выражение для энергии электрона на  $n$ -й орбите

атома Бора принимает особенно простой вид:

$$E_n = -\frac{Z^2}{n^2} Ry. \quad (3.16)$$

Отметим, что целое неотрицательное число  $n$ , фигурирующее в равенстве (3.16), отвечает главному квантовому числу электронного состояния в последовательной квантовой теории атома водорода. Формула (3.16) описывает *дискретный* спектр энергий электрона в водородоподобном атоме. Отрицательность полной энергии в дискретном спектре с точки зрения классической механики отвечает finитности движения электрона, а на квантово-механическом языке – связанности состояния. Наряду с дискретным спектром атомный электрон обладает *непрерывным* спектром, которому соответствуют положительные значения энергии. В непрерывном спектре движение электрона инфинитно, соответствующие состояния называются свободными. Нулевое значение энергии электрона является границей дискретного и непрерывного спектра. Энергия  $n$ -го связанного состояния, взятая с обратным знаком, представляет собой потенциал ионизации данного состояния. Потенциал ионизации основного состояния называется потенциалом ионизации атома и обозначается  $I_p$ .

Из формул (3.3) и (3.16) находим для частот излучения водородоподобного иона следующее выражение:

$$\omega_{mn} = \frac{Z^2 Ry}{\hbar} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (3.17)$$

Переписывая (3.17) через длины волн, получаем

$$\frac{1}{\lambda_{mn}} = \frac{Z^2 Ry}{2\pi\hbar c} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (3.18)$$

Сравнивая равенство (3.18) для атома водорода ( $Z = 1$ ) с формулой Бальмера (3.1), находим, что данные выражения совпадают, если

$$R = \frac{Ry}{2\pi\hbar c}. \quad (3.19)$$

Легко проверить, используя численные значения констант, что равенство (3.19) действительно выполняется.

Таким образом, теория атома Бора воспроизводит экспериментальную формулу Бальмера (3.1) для длин волн излучения атома во-

дорода. Это явилось крупным успехом данной теории и, что особенно важно, подтвердило необходимость введения квантовых представлений не только в теорию излучения, но и в микротерию вещества.

Отметим, что с формальной точки зрения вместо условия квантования момента количества движения (3.2) предпочтительнее пользоваться равенством (3.4), которое может быть получено как условие на де-бройлевскую длину волны атомного электрона на  $n$ -й орбите:

$$\lambda_n^{(DB)} n = 2 \pi r_n. \quad (3.20)$$

Легко проверить, что (3.20) сводится к (3.4), если воспользоваться определением де-бройлевской длины волны электрона:

$$\lambda^{(DB)} = \frac{h}{p} = \frac{2 \pi \hbar}{m_e v}. \quad (3.21)$$

Равенство (3.20) отвечает условию на длину волны незатухающего колебания на окружности, соответствующей  $n$ -й орбите атома Бора.

Дело в том, что на самом деле уравнение (3.2) никогда не выполняется точно. В реальных атомах величина момента количества движения удовлетворяет неравенству  $M_n \leq \sqrt{n(n-1)} \hbar$ . Правильный результат для энергии (3.16) получился вследствие компенсации указанной неточности и того, что  $M_n \neq p_n r_n$ , т.е. собственное значение момента количества движения не равно произведению собственных значений импульса и координаты.

Теория Бора оказалась неприменимой к атомам, содержащим более чем один электрон. Кроме того, даже в случае водородоподобного иона теория Бора предсказывает только длины волн излучения, но не интенсивности и поляризации. Она, однако, сыграла важную роль в истории квантовой физики, поскольку послужила отправной точкой для развития последовательной квантово-механической теории. Чтобы отметить данную преемственность, теорию атома Бора называют иногда старой квантовой теорией. Теорию Бора можно также назвать полуклассической, поскольку система ее основных уравнений (3.4) – (3.5), как уже отмечалось выше, содержит как квантовое (3.4), так и классическое (3.5) уравнение.

### 3.2. Принцип соответствия между классической и квантовой физикой

Важно подчеркнуть, что теория Бора является не только теорией атома водорода, но и теорией взаимодействия электромагнитного излучения с атомом, т.к. важные черты этого взаимодействия описываются 2 и 3 постулатами Бора. Дальнейшее развитие теории взаимодействия излучения с атомами может быть осуществлено, не прибегая к последовательному квантово-электродинамическому формализму, а используя так называемый *принцип соответствия* в духе полуклассического подхода Бора. Отправной точкой такого рассмотрения является выражение для мощности дипольного излучения, известное из классической электродинамики. Оно имеет вид

$$Q(t) = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{d}}(t)|^2, \quad (3.22)$$

где

$$\mathbf{d}(t) = e\mathbf{r}(t) \quad (3.23)$$

– дипольный момент частицы с зарядом  $e$ , под которой в дальнейшем будем понимать электрон. Две точки над символом дипольного момента в формуле (3.22) обозначают вторую производную по времени. Критерий применимости дипольного приближения, в рамках которого получена формула (3.22), может быть сформулирован в виде неравенства

$$\lambda \ll a, \quad (3.24)$$

где  $a$  – размер области пространства, ответственной за излучение,  $\lambda$  – длина волны излучения. В случае атома, когда  $a \approx 10^{-8}$  см, условие (3.24) охватывает широкий диапазон длин волн вплоть до жесткого рентгеновского излучения.

Вторая производная по времени от дипольного момента, фигурирующая в правой части равенства (3.22), элементарно выражается через ускорение электрона  $\mathbf{w}$ :  $\ddot{\mathbf{d}} = e\mathbf{w}$ . С учетом этого формула (3.22) переписывается в виде [1]

$$Q = \frac{2e^2 w^2}{3c^3}. \quad (3.25)$$

Таким образом, в рамках классической физики ускоренно движущаяся заряженная частица будет терять свою энергию на диполь-



ное излучение со скоростью, определяемой формулой (3.25). Заметим, что потеря энергии зарядом, находящимся в кулоновском поле, приводит не к уменьшению, а к увеличению его кинетической энергии. Это видно и из квантовых формул (3.10) – (3.12). Увеличение кинетической энергии заряда сопровождается в два раза большим уменьшением его потенциальной энергии (см. формулу (3.13)), что связано с уменьшением расстояния до центра кулоновского поля. В результате полная энергия электрона уменьшается.

В случае периодического движения заряда с круговой частотой  $\omega_0$ , как это имеет место с атомным электроном, представляет интерес мощность излучения, усредненная по периоду движения  $T = 2\pi/\omega_0$ . Для того чтобы произвести это усреднение в формуле (3.22), воспользуемся следующим равенством, справедливым для действительной периодической функции  $f(t)$ :

$$\left\langle f(t)^2 \right\rangle_T \equiv \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)^2 dt = 2 \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2, \quad (3.26)$$

где

$$f_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \exp(-n\omega_0 t) dt \quad (3.27)$$

–  $n$ -я гармоника разложения в ряд Фурье функции  $f(t)$ . При выводе формулы (3.26) было предположено, что среднее по периоду от рассматриваемой функции равно нулю, т.е.  $f_0 = 0$ . Заметим, что коэффициент 2 в правой части равенства (3.26) связан с учетом вклада отрицательных гармоник ряда Фурье ( $n < 0$ ).

Пользуясь равенством (3.26), в котором положено  $f(t) = \ddot{\mathbf{d}}(t)$ , для усредненной по периоду мощности дипольного излучения получаем из (3.22) следующее выражение:

$$\left\langle Q(t) \right\rangle_T = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n, \quad (3.28)$$

где

$$Q_n = \frac{4}{3c^3} |(\ddot{\mathbf{d}})_n|^2. \quad (3.29)$$

С учетом того, что

$$(\ddot{\mathbf{d}})_n = -(n\omega_0)^2 (\mathbf{d})_n \quad (3.30)$$

из формулы (3.29) находим

$$Q_n = \frac{4(n\omega_0)^4}{3c^3} |(\mathbf{d})_n|^2. \quad (3.31)$$

Формула (3.31) описывает мощность дипольного излучения на частоте  $n$ -й гармонике  $\omega_n = n\omega_0$ . В частности, мощность излучения на частоте периодического движения электрона  $\omega_0$  ( $n = 1$ ) равна:

$$Q(\omega_0) = \frac{4\omega_0^4}{3c^3} |\mathbf{d}(\omega_0)|^2. \quad (3.32)$$

Здесь мы переобозначили 1-ю Фурье-гармонику дипольного момента:  $\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}(\omega_0)$ .

Заменим теперь в формуле (3.32) Фурье-гармонику дипольного момента на его матричный элемент, вычисленный между состояниями  $|m\rangle$  и  $|n\rangle$  ( $\Psi_{m,n}(\mathbf{r})$  – волновые функции этих состояний):

$$\mathbf{d}(\omega_0) \rightarrow \mathbf{d}_{mn} \equiv \langle m | \mathbf{d} | n \rangle = \int d\mathbf{r} \Psi_m^*(\mathbf{r}) \mathbf{d} \Psi_n(\mathbf{r}), \quad (3.33)$$

а частоту периодического движения  $\omega_0$  на частоту перехода  $|n\rangle \rightarrow |m\rangle$ :

$$\omega_0 \rightarrow \omega_{mn} = \frac{E_n - E_m}{\hbar}. \quad (3.34)$$

В результате вместо формулы (3.32) получим

$$Q_{mn} = \frac{4\omega_{mn}^4}{3c^3} |\mathbf{d}_{mn}|^2. \quad (3.35)$$

Величина (3.35) может быть названа мощностью электромагнитного излучения при переходе атомного электрона из стационарного состояния  $|n\rangle$  в стационарное состояние  $|m\rangle$ . Она описывает интен-

сивность излучения различных спектральных серий атома водорода: Лаймана ( $m = 1$ ), Бальмера ( $m = 2$ ), Пашена ( $m = 3$ ) и т. д. Надо, однако, иметь в виду, что, в отличие от классической мощности излучения (3.22), величину (3.35) нужно понимать в статистическом смысле, т.е. как результат усреднения по ансамблю атомов.

Если теперь мощность излучения (3.35) разделить на энергию рассматриваемого перехода  $\Delta E_{mn} = \hbar \omega_{mn}$ , то получим величину, имеющую размерность обратного времени, которая совпадает с коэффициентом Эйнштейна для спонтанного излучения  $A_{mn}$ :

$$\frac{Q_{mn}}{\Delta E_{mn}} = \frac{4\omega_{mn}^3}{3\hbar c^3} |\mathbf{d}_{mn}|^2 = A_{mn} = \frac{1}{\tau_{mn}}. \quad (3.36)$$

В последнем равенстве формулы (3.36) введено время жизни  $\tau_{mn}$  состояния  $|n\rangle$  по отношению к его спонтанному распаду с переходом в нижележащее состояние  $|m\rangle$ . Это время для перехода  $|2\rangle \rightarrow |1\rangle$  в атоме водорода равно:  $\tau_{12} \approx 1,6 \cdot 10^{-9}$  с.

Таким образом, использование формулы классической электродинамики (3.22) и замен (3.33) – (3.34) позволили получить квантовый результат для мощности излучения спектральных линий (3.35) и вероятности спонтанного излучения (3.36). Это обстоятельство является отражением *принципа соответствия* между классической и квантовой физикой. Данный принцип может быть сформулирован следующим образом. Квантово-механические выражения получаются из классических, если в последних Фурье-компоненты физических величин заменить на матричные элементы этих величин. Причем частота квантового перехода должна совпадать с частотой Фурье-компоненты.

Любопытно отметить, что наличие конечного времени жизни возбужденного состояния  $|n\rangle$  может быть интерпретировано в духе принципа соответствия, как «падение» электрона на ядро за счет излучения фотонов – тот самый процесс, против которого «борется» второй постулат Бора. Это «падение» продолжается до тех пор, пока электрон не достигнет основного состояния  $m=1$ , обладающего наименьшей возможной с точки зрения квантовой физики энергией.

Чтобы выяснить физическое обоснование 2-го постулата Бора, введем классический период вращения электрона на  $n$ -орбите:

$$T_n = \frac{2\pi r_n}{v_n} = n^3 2\pi \tau_a. \quad (3.37)$$

При записи формулы (3.37) были использованы выражения (3.6), (3.7) и (3.9). Оценим теперь отношение периода (3.37) ко времени жизни  $\tau_{mn}$ . Пользуясь (3.36) – (3.37) и полагая, что  $r_{mn} \approx a_B R(m, n)$ , где  $R(m, n)$  – некоторая функция порядка и меньше единицы, приближенно имеем

$$\frac{T_n}{\tau_{mn}} \approx \frac{T_n}{\tau_{1n}} \approx (\alpha n)^3 R^2(1, n) \approx 4 \cdot 10^{-7} n^3 R^2(1, n), \quad (3.38)$$

где  $n^3 R^2(1, n) \rightarrow 1$  для больших номеров  $n$  (см. асимптотическую формулу в таблице 1). Второе приближенное равенство в (3.38) отражает тот факт, что время жизни возбужденного состояния атома водорода определяется его переходом в основное состояние.

Из полученного соотношения (3.38) следует, что период обращения электрона по классической орбите на несколько порядков величины меньше времени жизни в данном состоянии  $|n\rangle$ . Таким образом, эти состояния с хорошей степенью точности можно считать стационарными в соответствии с первыми двумя постулатами Бора. Эта стационарность есть следствие малой величины постоянной тонкой структуры  $\alpha$ , ответственной за электромагнитное взаимодействие.

### 3.3. Сила осциллятора атомного перехода

Принцип соответствия между классической и квантовой физикой, конкретизированный для случая излучательных переходов в атоме, называется *спектроскопическим принципом соответствия*. Его можно сформулировать следующим образом: атом при взаимодействии с электромагнитным полем ведет себя как набор классических осцилляторов, обладающих собственными частотами, равными частотам переходов между атомными уровнями энергии. Это значит, что каждому переходу между атомными состояниями  $|j\rangle$  и  $|n\rangle$  ставится

в соответствие осциллятор с собственной частотой  $\omega_{jn}$ . Назовем эти осцилляторы осцилляторами переходов. Вклад осцилляторов переходов в отклик атома на электромагнитное воздействие пропорционален безразмерной величине, называемой *силой осциллятора*. Чем больше сила осциллятора, тем сильнее соответствующий переход. Сила осциллятора для перехода между состояниями дискретного спектра  $|j\rangle \rightarrow |n\rangle$  –  $f_{jn}$  – определяется формулой

$$f_{jn} = \frac{2m_e \omega_{jn} |\langle n | \mathbf{d} | j \rangle|^2}{3e^2 \hbar g_j}, \quad (3.39)$$

где  $g_j$  – статистический вес  $j$ -го состояния. Из формулы (3.39) следует равенство  $g_j f_{jn} = -g_n f_{nj}$ , поскольку сила осциллятора для перехода с уменьшением энергии отрицательна. Согласно своему физическому смыслу сила осциллятора одноэлектронного атома всегда меньше единицы.

Формулировка принципа соответствия с силой осциллятора в форме (3.39) отвечает дипольному приближению, критерий которого дается неравенством (3.24). В противном случае определение (3.39) должно быть обобщено, чтобы включить в себя недипольную часть взаимодействия электромагнитного излучения с атомными электронами. Кроме того, недипольность взаимодействия оказывается существенной, если матричный элемент дипольного момента в формуле (3.39) равен нулю. Такие переходы называются *дипольно-запрещенными* в противоположность *дипольно-разрешенным* переходам, когда  $\langle n | \mathbf{d} | j \rangle \neq 0$ . Равенство или неравенство нулю дипольного момента перехода может быть предсказано на основании соображений симметрии состояний, между которыми происходит переход. Соотношения между характеристиками атомных состояний, позволяющие предсказать ненулевое значение величины  $\langle n | \mathbf{d} | j \rangle$ , называются *правилами отбора для дипольного излучения*. Наиболее простой вид эти правила имеют для водородоподобного иона. Систематика его электронных состояний в пренебрежении спин-орбитальным взаимодействием весьма проста. Энергетический уровень с главным числом  $n$  (см. формулу (3.16)) имеет  $2n^2$ -кратное вырождение, которое воз-

никает следующим образом. Во-первых, имеется специфическое для водородоподобного иона вырождение по квантовому числу орбитального момента  $l$ : энергию  $E_n$  имеют состояния атомного электрона с  $l = 0, 1, \dots, n-1$ , обозначаемые как  $|n, l\rangle$ . Напомним, что численным обозначениям  $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$  соответствуют буквенные:  $s, p, d, f, g, h, i, \dots$ . Далее, каждое состояние  $|n, l\rangle$  вырождено по значению проекции орбитального момента электрона на выделенную ось. Это вырождение носит общий характер и связано со сферической симметрией атомного потенциала. Квантовое число проекции момента количества движения  $m_l$  пробегает  $2l+1$  значение:  $m_l = -l, -l+1, \dots, l-1, l$ , чему соответствуют состояния  $|n, l, m_l\rangle$ . Наконец, электронные состояния  $|n, l, m_l\rangle$  двукратно вырождены по проекции спина электрона, что в результате дает  $2n^2$ -кратное вырождение энергетического уровня водородоподобного иона с главным квантовым числом  $n$ . Отметим, что данная классификация справедлива для состояний дискретного спектра. В случае непрерывного спектра имеется дополнительное вырождение состояний, связанное с различными направлениями импульса электрона.

В терминах приведенной классификации состояний правила отбора для дипольного излучения водородоподобного иона сводятся к следующему. Разрешенными являются переходы, для которых орбитальное квантовое число изменяется на единицу:  $l \rightarrow l \pm 1$ . Магнитное квантовое число при этом изменяется не более чем на единицу  $m_l \rightarrow m_l, m_l \pm 1$ . В частности, если магнитное квантовое число не изменяется, то излучается (поглощается) линейно поляризованное излучение, в оставшихся случаях – циркулярно поляризованное. Частным случаем правил отбора является тот факт, что средний дипольный момент атома в отсутствие внешних полей равен нулю:  $\langle \mathbf{d} \rangle = 0$ . Это обстоятельство может рассматриваться так же, как следствие сферической симметрии атома.

Помимо электронных переходов в дискретном спектре (связанно-связанные переходы), имеют место также переходы из связанных состояний в состояния непрерывного спектра (связанно-свободные переходы), для которых тоже вводится понятие силы осциллятора по

формуле, аналогичной (3.39). Физически связанно-свободному переходу соответствует ионизация атома. В отличие от случая связанно-связанного перехода, сила осциллятора для связанно-свободного перехода в состояние с энергией  $\varepsilon - f_{j\varepsilon}$  уже не является безразмерной величиной. Размерность  $f_{j\varepsilon}$  равняется обратной энергии, что соответствует нормировке волновой функции непрерывного спектра на дельта-функцию от энергии. Поэтому для связанно-свободного перехода вместо силы осциллятора используется понятие плотности силы осциллятора:  $f_{j\varepsilon} \rightarrow df_j/d\varepsilon$ .

Силы осцилляторов связанно-связанных и связанно-свободных переходов в атоме удовлетворяют так называемому *золотому правилу сумм*, которое для переходов из основного состояния выражается равенством

$$\sum_n f_{0n} + \int_{I_p}^{\infty} \frac{df_0}{d\varepsilon} d\varepsilon = N_e, \quad (3.40)$$

где  $I_p$  – потенциал ионизации атома,  $N_e$  – число электронов в атоме.

Силы осцилляторов для ряда электронных переходов в атоме водорода приведены в таблице 3.1

Из этой таблицы вытекают следующие закономерности. Во-первых, для переходов с увеличением энергии сила осциллятора больше в случае увеличения орбитального квантового числа, т.е. переход  $n, l \rightarrow n', l+1$  сильнее перехода  $n, l \rightarrow n', l-1$ , если  $n < n'$ . Во-вторых, сумма сил осцилляторов для переходов в непрерывный спектр уменьшается с ростом орбитального квантового числа начального состояния, т.е. состояния с большим орбитальным моментом труднее ионизировать. В-третьих, наибольшей силой осциллятора обладают переходы в состояние с ближайшим главным квантовым числом. В-четвертых, силы осцилляторов для переходов с нижних уровней в состояния с большими квантовыми числами  $n \geq 10$  убывают как  $n^{-3}$ . Эти закономерности определяют вероятности соответствующих излучательных переходов в атоме водорода. Важным свойством силы осциллятора для водородоподобного иона является независимость данной величины от заряда ядра иона  $Z$ . Это легко уви-

деть из определения (3.39). В нем фигурируют две величины, зависящие от заряда ядра: частота перехода  $\omega_{jn}$  и матричный элемент дипольного момента перехода  $\mathbf{d}_{nj}$ . Если учесть, что  $\omega_{jn} \propto Z^2$  (см. формулу (3.17)), а  $\mathbf{d}_{nj} \propto Z^{-1}$  (по аналогии с (3.7)), то сразу получаем требуемое утверждение.

Т а б л и ц а 3.1

**Силы осцилляторов для атома водорода**

Начальное состояние	1s	2s	2p		3s	3p
Конечное состояние	np	np	ns	nd	np	ns
$n = 1$	0	—	-0,139	—	—	0,026
2	0,4162	0	0	—	0,141	0,145
3	0,0791	0,4349	0,014	0,696	0	0
4	0,0290	0,1028	0,0031	0,122	0,484	0,032
5	0,0139	0,0419	0,0012	0,044	0,121	0,007
6	0,0078	0,0216	0,0006	0,022	0,052	0,003
7	0,0048	0,0127	0,0003	0,012	0,027	0,002
8	0,0032	0,0081	0,0002	0,008	0,016	0,001
Сумма от $n = 9$ до $n = \infty$	0,0109	0,0268	0,0007	0,023	0,048	0,002
Асимптотическая формула	$1,6 n^{-3}$	$3,7 n^{-3}$	$0,1 n^{-3}$	$3,3 n^{-3}$	$6,2 n^{-3}$	$0,3 n^{-3}$
Дискретный спектр	0,5650	0,6489	-0,119	0,928	0,707	0,121
Непрерывный спектр	0,4350	0,3511	0,008	0,183	0,293	0,010
Полная сумма	1,000	1,000	-0,111	1,111	1,000	0,111



### 3.4. Динамическая поляризуемость атома

Рассмотрим теперь отклик атома на электромагнитное воздействие. Будем предполагать, что напряженность электрического поля в электромагнитной волне  $E$  мала по сравнению напряженностью поля атома водорода на первой боровской орбите  $E_a$  :

$$E \ll E_a = \frac{m_e^2 e^5}{\hbar^4} \cong 5,14 \cdot 10^9 \text{ В/см} . \quad (3.41)$$

Атомной напряженности соответствует атомная интенсивность излучения  $I_a$ , так что неравенство (3.41) можно переписать в виде

$$I \ll I_a = c \frac{E_a^2}{8\pi} = \frac{m_e^4 e^{10} c}{8\pi \hbar^8} \cong 3,52 \cdot 10^{16} \frac{\text{Вт}}{\text{см}^2} . \quad (3.42)$$

Отклик атома на электромагнитное излучение может быть охарактеризован наведенным дипольным моментом  $\mathbf{d}$ , который в случае монохроматического поля  $\mathbf{E}(t) = 2 \text{Re} \{ \mathbf{E}_\omega \exp(-i\omega t) \}$  равен

$$\mathbf{d}(t) = 2 \text{Re} \{ \beta(\omega) \mathbf{E}_\omega \exp(-i\omega t) \} . \quad (3.43)$$

Здесь введена динамическая поляризуемость атома  $\beta(\omega)$ , которая определяется равенством

$$\mathbf{d}_\omega = \beta(\omega) \mathbf{E}_\omega . \quad (3.44)$$

В формулах (3.43) – (3.44)  $\mathbf{E}_\omega$  – комплексный вектор напряженности электрического поля в монохроматическом излучении, являющийся Фурье-компонентой от  $\mathbf{E}(t)$ .

Напомним, что дипольный момент атома в отсутствие внешних полей равен нулю в силу сферической симметрии, поэтому величина наведенного дипольного момента действительно может служить мерой возмущения атома внешним воздействием. Линейная зависимость  $\mathbf{d}(t)$  от напряженности электрического поля (3.43) справедлива в

случае малости величины  $E$  в смысле выполнения неравенств (3.41) – (3.42). Таким образом, для достаточно малых полей отклик атома на электромагнитное возмущение может быть охарактеризован его поляризуемостью  $\beta(\omega)$ .

Для определения динамической поляризуемости атома  $\beta(\omega)$  воспользуемся спектроскопическим принципом соответствия. Согласно этому принципу изменение состояния атома складывается из изменения движения осцилляторов, соответствующих переходам между атомными состояниями (осцилляторов переходов). Неравенства (3.41) – (3.42) означают малость возмущения состояния атомного электрона за счет действия электромагнитного поля. Таким образом, можно считать отклонения осцилляторов переходов от положения равновесия под воздействием поля  $\mathbf{E}(t)$  малыми, поэтому для  $n$ -го осциллятора справедливо уравнение движения в гармоническом приближении:

$$\ddot{\mathbf{r}}_n + \gamma_{0n} \dot{\mathbf{r}}_n + \omega_{0n}^2 \mathbf{r}_n = \frac{e}{m_e} f_{0n} \mathbf{E}(t), \quad (3.45)$$

где  $\mathbf{r}_n$  – радиус-вектор, соответствующий отклонению осциллятора перехода от положения равновесия;  $\gamma_{0n}$ ,  $\omega_{0n}$ ,  $f_{0n}$  – константа затухания, собственная частота и сила осциллятора. Для простоты рассматриваем одноэлектронный атом в основном состоянии, дипольный момент которого равен  $\mathbf{d} = e \mathbf{r}$ . (В случае многоэлектронного атома дипольный момент равен сумме дипольных моментов атомных электронов.) В силу принципа соответствия наведенный дипольный момент атома складывается из наведенных дипольных моментов осцилляторов переходов  $\mathbf{d}_n$ :  $\mathbf{d} = \sum_n \mathbf{d}_n = e \sum_n \mathbf{r}_n$ . Переходя в этом равенстве к Фурье-компонентам, имеем

$$\mathbf{d}_\omega = e \sum_n \mathbf{r}_{n\omega}, \quad (3.46)$$

где  $\mathbf{r}_{n\omega}$  – Фурье-образ радиуса-вектора отклонения осциллятора перехода от положения равновесия. Выражение для этой величины следует из уравнения движения (3.45):

$$\mathbf{r}_{n\omega} = \frac{e}{m_e} \frac{f_{0n}}{\omega_{0n}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_{0n}} \mathbf{E}_\omega. \quad (3.47)$$

Подставляя формулу (3.47) в равенство (3.46) и используя определение поляризуемости (3.44), находим для нее следующее выражение:

$$\beta(\omega) = \frac{e^2}{m_e} \sum_n \frac{f_{0n}}{\omega_{0n}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_{0n}}. \quad (3.48)$$

Отсюда вытекает, что динамическая поляризуемость атома представляет собой, вообще говоря, комплексную величину с размерностью объема. Мнимая часть поляризуемости пропорциональна константам затухания осцилляторов переходов. Сумма в правой части равенства (3.48) включает в себя как суммирование по дискретному энергетическому спектру, так и интегрирование по непрерывному спектру энергии. Как мы увидим далее, мнимая часть поляризуемости ответственна за поглощение излучения, а действительная часть определяет преломление. Выражение (3.48) описывает не только одноэлектронный, но и многоэлектронный атом. Многоэлектронность атома учитывается тем обстоятельством, что в определении силы осциллятора (3.39) дипольный момент атома равен сумме дипольных моментов его электронов.

Из равенства (3.48) можно получить несколько важных предельных случаев. Так, если частота внешнего поля равна нулю, то формула (3.48) дает выражение для статической поляризуемости атома:

$$\beta_0 \equiv \beta(\omega = 0) = \frac{e^2}{m_e} \sum_n \frac{f_{0n}}{\omega_{0n}^2}. \quad (3.49)$$

Отсюда видно, что статическая поляризуемость – действительная и положительная величина. Она имеет большое численное значение, если в спектре атома есть переходы с большой силой осциллятора и малой собственной частотой.

В противоположном, высокочастотном, пределе, когда  $\omega \gg I_p$  и можно пренебречь собственными частотами в знаменателях (3.48), из формулы (3.48) с учетом золотого правила сумм (3.40), получаем

$$\beta_{\infty}(\omega) = -\frac{e^2 N_e}{m_e \omega^2}. \quad (3.50)$$

Высокочастотная поляризуемость атома (3.50) – действительная и отрицательная величина. Наконец, если частота внешнего поля близка к одной из собственных частот осцилляторов перехода, так что выполняется условие резонанса

$$|\omega - \omega_{0n}| \ll \omega, \quad (3.51)$$

и можно оставить одно резонансное слагаемое в сумме (3.48), то из (3.48) следует выражение для резонансной поляризуемости:

$$\beta_{res}(\omega) = \left( \frac{e^2}{2 m_e \omega_{0n}} \right) \frac{f_{0n}}{\omega_{0n} - \omega - i \gamma_{0n}/2}. \quad (3.52)$$

При выводе (3.52) из (3.48) в нерезонансных комбинациях было пренебрежено отличием частоты внешнего поля от собственной частоты перехода. Резонансная поляризуемость является комплексной величиной, действительная часть которой может быть как положительной, так и отрицательной.

Равенство (3.44), определяющее динамическую поляризуемость, после взятия обратного Фурье-преобразования может быть переписано в виде

$$\mathbf{d}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau, \quad (3.53)$$

где  $\beta(\tau)$  – действительная функция времени, Фурье-образ которой равен динамической поляризуемости  $\beta(\omega)$ . Наиболее простое выражение для  $\beta(\tau)$  следует из формулы (3.52):

$$\beta_{res}(\tau) = \frac{e^2 f_{0n}}{2 m_e \omega_{0n}} (-i) \theta(\tau) \exp(-i \omega_{0n} \tau - \gamma_{0n} \tau/2), \quad (3.54)$$

где  $\theta(\tau)$  – ступенчатая функция Хэвисайда. Временная зависимость наведенного дипольного момента  $\mathbf{d}(t)$  совпадает с временной зави-

симостью правой части равенства (3.54) для дельта-импульса поля:  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \delta(t)$ , где  $\delta(t)$  – дельта-функция Дирака. В общем случае выражение для  $\beta(\tau)$  может быть получено путем замены частоты  $\omega_{0n} \rightarrow \sqrt{\omega_{0n}^2 - (\gamma_{0n}/2)^2}$  и суммирования по всем осцилляторам переходов. Заметим, что уменьшение собственной частоты колебаний с учетом затухания, следующее из приведенной замены, вполне естественно, поскольку трение (аналог затухания) уменьшает скорость движения.

Из формулы (3.54), в частности, следует равенство нулю поляризуемости  $\beta(\tau)$  для времен  $\tau < 0$ , что является отражением принципа *причинности*. Действительно, как это видно из (3.53), чтобы следствие по времени было позже его причины, необходимо выполнение условия:  $\beta(\tau < 0) = 0$ . Принцип причинности налагает определенные ограничения на вид функции  $\beta(\omega)$ , откуда вытекают соотношения *Крамерса–Кронига*, связывающие действительную и мнимую часть динамической поляризуемости. Эти формулы имеют вид

$$\operatorname{Re}\{\beta(\omega)\} = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\{\beta(\omega')\}}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (3.55)$$

$$\operatorname{Im}\{\beta(\omega)\} = \frac{1}{\pi} V.P. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\{\beta(\omega')\}}{\omega - \omega'} d\omega', \quad (3.56)$$

введен интеграл в смысле главного значения:

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{a-\Delta} \frac{f(x)}{x-a} dx + \int_{a+\Delta}^{+\infty} \frac{f(x)}{x-a} dx \right\}. \quad (3.57)$$

Пользуясь равенствами (3.55) – (3.56), можно по мнимой части поляризуемости восстановить действительную часть и наоборот.

### 3.5. Поглощение и рассеяние света атомом

Другое важное соотношение, называемое *оптической теоремой*, связывает мнимую часть динамической поляризуемости и сечение

поглощения электромагнитного излучения атомом  $\sigma_{ph}$  :

$$\sigma_{ph}(\omega) = \frac{4\pi\omega}{c} \text{Im}\{\beta(\omega)\}. \quad (3.58)$$

Отсюда с учетом выражения для резонансной поляризуемости (3.52) следует формула для сечения поглощения резонансного излучения на связанно-связанном переходе  $|0\rangle \rightarrow |n\rangle$  в атоме:

$$\sigma_{0n}(\omega) = \left( \frac{\pi e^2 f_{0n}}{m_e c} \right) \frac{\gamma_{0n}}{(\omega_{0n} - \omega)^2 + (\gamma_{0n}/2)^2}. \quad (3.59)$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\sigma_{0n}(\omega) = \frac{2\pi^2 e^2 f_{0n}}{m_e c} G_{0n}^{(h)}(\omega), \quad (3.60)$$

где

$$G_{0n}^{(h)}(\omega) = \frac{\gamma_{0n}/(2\pi)}{(\omega_{0n} - \omega)^2 + (\gamma_{0n}/2)^2} \quad (3.61)$$

– нормированная форма спектральной линии атомного перехода при однородном уширении. Из формул (3.60) – (3.61) следует, что ширина спектральной линии равна константе затухания соответствующего осциллятора атомного перехода:  $\Delta\omega_{0n} = \gamma_{0n}$ . Таким образом, время затухания  $\tau_{0n} = 1/\gamma_{0n}$  наведенного дипольного момента (см. формулу (3.54)) обратно пропорционально ширине линии поглощения  $\Delta\omega_{0n}$ . В случае изолированного атома в неограниченном пространстве ширина линии определяется вероятностью спонтанного излучения, т.е. коэффициентом Эйнштейна (3.36):

$$(\Delta\omega_{0n})_{\text{ест}} = (\gamma_{0n})_{\text{ест}} = A_{0n}. \quad (3.62)$$

Выражение (3.62) определяет так называемое *естественное уширение* спектральной линии. Естественное уширение является ми-

нимально возможным, поскольку определяется неустранимой причиной – спонтанным излучением. С учетом формул (3.60), (3.62) и (3.36) находим величину сечения поглощения излучения в максимуме для перехода в изолированном атоме:

$$\sigma_{0n}(\omega = \omega_{0n}) = \frac{2\pi c^2 g_n}{\omega_{0n}^2 g_0} = \frac{g_n}{2\pi g_0} \lambda_{0n}^2, \quad (3.63)$$

где  $g_0 = 2l_0 + 1$  и  $g_n = 2l_n + 1$  – статистические веса соответствующих состояний. Таким образом, сечение поглощения в максимуме частотной зависимости в случае естественного уширения спектральной линии пропорционально квадрату длины волны резонансного излучения, т.е. в широком спектральном диапазоне намного превосходит геометрическое сечение атома.

Динамическая поляризуемость определяет в дипольном приближении (3.24) релеевское сечение рассеяния электромагнитного излучения атомом, т.е. рассеяния без изменения длины волны излучения. Соответствующая формула имеет вид

$$\sigma_{scat}(\omega) = \frac{8\pi}{3} \left| \frac{\omega^2}{c^2} \beta(\omega) \right|^2. \quad (3.64)$$

Выражение (3.64) получается из определения сечения процесса через вероятность и поток фотонов, формулы (3.35) для мощности электромагнитного излучения на частоте  $\omega$ , выражения для дипольного момента через поляризуемость (3.44) и формулы для интенсивности излучения через напряженность электрического поля. Из равенства (3.64) следует, что в пределе низких частот ( $\beta \rightarrow \beta_0$ ) сечение рассеяния пропорционально четвертой степени частоты излучения.

В высокочастотном пределе, когда справедливо выражение (3.50) для поляризуемости сечение рассеяния, и при  $N_e = 1$  равенство (3.64) переходит в известную формулу Томсона:

$$\sigma_{scat}^{(Th)}(\omega) = \frac{8\pi}{3} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 = \frac{8\pi}{3} r_e^2, \quad (3.65)$$

где введен «классический» радиус электрона:

$$r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ см.} \quad (3.66)$$

Формула Томсона описывает рассеяние электромагнитного излучения на свободном электроне. Она получается при использовании высокочастотного предела для поляризуемости (3.50), поскольку для свободного электрона собственные частоты равны нулю, так что условие высокочастотности  $\omega_{0n} \ll \omega$  удовлетворяется автоматически.

В резонансном случае (см. условие (3.51)) формула (3.64) дает

$$\sigma_{scat}^{(res)}(\omega \approx \omega_{0n}) = \frac{2\pi}{3} f_{0n}^2 r_e^2 \frac{\omega_{0n}^2}{(\omega - \omega_{0n})^2 + (\gamma_{0n}/2)^2}. \quad (3.67)$$

Из этого выражения получаем сечение рассеяния в максимуме спектральной линии в случае естественного уширения (3.62):

$$\sigma_{scat}(\omega = \omega_{0n}) = \frac{2\pi c^2}{3\omega_{0n}^2} \left( \frac{g_n}{g_0} \right)^2 = \frac{1}{6\pi} \left( \frac{g_n}{g_0} \right)^2 \lambda_{0n}^2. \quad (3.68)$$

Итак, резонансное сечение рассеяния электромагнитного излучения на атоме в максимуме частотной зависимости (3.68) так же, как и резонансное сечение поглощения (3.63), пропорционально квадрату длины волны излучения и не зависит от дипольного момента перехода  $\mathbf{d}_{0n}$ , если имеет место естественное уширение спектральной линии (3.62).

Поляризуемость атома определяет сдвиг его энергии во внешнем электрическом поле  $\Delta E$ , если последнее не слишком велико (см. неравенства (3.41) – (3.42)). Тогда имеет место так называемый квадратичный эффект Штарка, т.е. квадратичная зависимость  $\Delta E$  от напряженности электрического поля. В случае постоянного электрического поля, слабо изменяющегося в пространстве на расстоянии, порядка размера атома  $\mathbf{E}(\mathbf{r}) \approx \mathbf{E}_0$ , формула для сдвига энергии при квадратичном эффекте Штарка имеет вид

$$\Delta E^{(2)} = -\frac{1}{2} \beta_0 E_0^2, \quad (3.69)$$

где  $\beta_0$  – статическая поляризуемость атома (см. формулу (3.49)).



Статическая поляризуемость водородоподобного атома с зарядом ядра  $Z$  равна

$$\beta_0 = \frac{9}{2Z^4} a_B^3 = \frac{9}{2Z^4} \text{ а. е.} \quad (3.70)$$

Атомная единица поляризуемости совпадает с кубом боровского радиуса (3.7), так что:  $1 \text{ а. е.} \approx 0.149 \text{ \AA}^3$ . Убывание поляризуемости (3.70) как  $Z^{-4}$  очевидно из формул (3.49) и (3.17), если учесть, что сила осциллятора водородоподобного атома не зависит от заряда ядра. Статическая поляризуемость атома, грубо говоря, тем больше, чем больше атомный объем и чем меньше потенциал ионизации атома. Поэтому наибольшей поляризуемостью обладают атомы щелочных металлов, обладающие минимальными потенциалами ионизации (менее 5.5 эВ), и наименьшей – атомы инертных газов, у которых потенциал ионизации велик (более 12 эВ). Характерная величина статической поляризуемости щелочных атомов составляет несколько сотен атомных единиц, а атомов инертных газов – от 1.38 а. е. у гелия до 27 а. е. у ксенона. Наибольшей величиной обладает резонансная поляризуемость атомов (формула (3.52)), достигающая десятков тысяч атомных единиц.

Динамическая поляризуемость определяет спектральную мощность так называемого *поляризационного тормозного излучения* (ПТИ). ПТИ возникает в процессе рассеяния заряженной частицы на атоме. В этом случае фотон излучается в результате наведения динамической поляризации в электронных оболочках атома. Наиболее простая трактовка ПТИ использует метод эквивалентных фотонов Ферми, в котором рассеивающаяся заряженная частица заменяется потоком эквивалентных фотонов, порожденных ее электромагнитным полем. Интенсивность потока эквивалентных фотонов  $dI_{\omega}^{EPh}$  в спектральном интервале  $d\omega$  в приближении прямопролетных заряженных частиц дается равенством:

$$dI_{\omega}^{EPh} = \frac{2}{\pi} \frac{c}{v} e_{pr}^2 n_{pr} \ln \left( \frac{v}{\omega R_a} \right) d\omega, \quad \omega < \frac{v}{R_a}, \quad (3.71)$$

где  $e_{pr}$ ,  $n_{pr}$ ,  $v$  – заряд, концентрация и скорость налетающих час-

тиц,  $R_a$  – эффективный радиус атома. Выражение для спектральной мощности ПТИ  $dQ_\omega^{PB}$  можно получить с использованием сечения рассеяния (3.64), которое в данном случае описывает рассеяние виртуальных фотонов, составляющих собственное поле налетающей частицы. Соответствующая формула имеет вид

$$dQ_\omega^{PB} = \sigma_{scat}(\omega) dI_\omega^{EPH}, \quad (3.72)$$

что дает

$$dQ_\omega^{PB} = \frac{16}{3} e_{pr}^2 n_{pr} \frac{|\omega^2 \beta(\omega)|^2}{c^3 v} \ln\left(\frac{v}{\omega R_a}\right) d\omega. \quad (3.73)$$

Выражение (3.73) справедливо в частотном интервале  $\omega < v/R_a$ , где применимо дипольное приближение по взаимодействию налетающей частицы с атомом. Важным свойством ПТИ, отличающим его от обычного тормозного излучения, является независимость интенсивности от массы налетающей частицы.

Таким образом, используя принцип соответствия и понятие силы осциллятора, нам удалось описать ряд процессов взаимодействия излучения с атомом, не прибегая к квантовой механике. Изложенный подход позволил получить выражение для динамической поляризуемости атома (см. формулу (3.48)), лежащее в основе теории дисперсии электромагнитного поля в среде.

## ГЛАВА 4. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В СРЕДЕ

### 4.1. Уравнения Максвелла в среде

Микроскопическое электрическое  $\mathbf{e}$  и магнитное  $\mathbf{h}$  поля в среде, создаваемые микроскопической плотностью зарядов  $\rho_{micr}$  и токов  $\mathbf{j}_{micr}$ , описываются уравнениями Максвелла [1]:

$$\text{rote} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \quad (4.1)$$

$$\text{div} \mathbf{h} = 0, \quad (4.2)$$

$$\text{roth} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{micr}}, \quad (4.3)$$

$$\text{dive} = 4\pi \rho_{\text{micr}}, \quad (4.4)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме. Напомним, что уравнение (4.1) представляет собой закон электромагнитной индукции. Уравнение (4.2) постулирует отсутствие магнитных зарядов. Из уравнения (4.3) вытекает закон Ампера для магнитного поля (2-е слагаемое в правой части равенства (4.3)), кроме того, оно содержит добавленный Максвеллом ток смещения (первое слагаемое в правой части (4.3)). Наконец, уравнение (4.4) описывает закон Кулона в дифференциальной форме.

Фигурирующие в системе (4.1) – (4.4) микроскопические поля имеют сложную пространственную структуру, отражающую особенности атомного строения вещества. Тонкие детали этих полей содержат в себе избыточную информацию, как правило, ненужную в практических приложениях. Чтобы преодолеть эти недостатки, вместо микроскопических полей  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  рассматриваются *макроскопические* поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , определяемые согласно равенствам

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} \mathbf{e}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\delta V} \int_{\delta V} \mathbf{h}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (4.5)$$

где усреднение производится по физически бесконечно малому объему  $\delta V$ , содержащему точку  $\mathbf{r}$ . Под физически бесконечно малым объемом понимается объем, достаточно малый, чтобы удержать практически необходимую информацию о пространственной структуре поля, и в то же время достаточно большой, чтобы сгладить микрон неоднородности электромагнитного поля.

После усреднения по формулам (4.5) левых и правых частей равенств (4.1) – (4.4) система уравнений Максвелла принимает вид

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (4.6)$$

$$\text{div} \mathbf{H} = 0, \quad (4.7)$$

$$\text{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_c + \mathbf{j}_b), \quad (4.8)$$

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi (\rho_b + \rho_{\text{ext}}). \quad (4.9)$$

В правой части равенства (4.8) плотность электрического тока, усредненная по физически бесконечно малому объему, представлена в виде суммы плотности тока проводимости  $\mathbf{j}_c$  и плотности тока связанных зарядов  $\mathbf{j}_b$ . Для плотности тока проводимости справедлив закон Ома в дифференциальной форме:

$$\mathbf{j}_c = \sigma \mathbf{E}, \quad (4.10)$$

где  $\sigma$  – проводимость среды. Чтобы описать плотность тока связанных зарядов, вводится вектор поляризации среды  $\mathbf{P}$ , который по определению является дипольным моментом единицы объема среды. С его помощью имеем

$$\mathbf{j}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}. \quad (4.11)$$

Вектор поляризации среды связан с усредненной по бесконечно малому физическому объему плотностью связанных зарядов  $\rho_b$ , фигурирующей в правой части уравнения (4.9), согласно равенству

$$\rho_b = -\operatorname{div} \mathbf{P}. \quad (4.12)$$

В правой части (4.9) для общности введена плотность внешних зарядов  $\rho_{ext}$ , которую в дальнейшем будем полагать равной нулю, т.е. считать среду в целом электрически нейтральной. Кроме того, мы предполагаем, что среда немагнитна, т.е. вектор магнитной индукции в ней совпадает с вектором магнитного поля:  $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ .

Три составляющие вектора поляризации среды  $\mathbf{P}$  могут описать (согласно равенствам (4.11) – (4.12)) четырехвектор плотности тока  $j_b^{(4)} = (\rho_b c, \mathbf{j}_b)$ , поскольку компоненты последнего не являются независимыми, а связаны уравнением непрерывности:

$$\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_b = 0, \quad (4.13)$$

выражающим закон сохранения электрического заряда в дифференциальной форме. В то же время равенство (4.13), как в этом легко убедиться, автоматически выполняется для любого вектора  $\mathbf{P}$ , т.е. не накладывает на его компоненты никаких дополнительных связей.

Уравнения Максвелла (4.8) и (4.9) можно записать в более компактном виде, если ввести вектор электрической индукции  $\mathbf{D}$  согласно равенству

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}. \quad (4.14)$$

Тогда вместо уравнений (4.7) и (4.8) с учетом закона Ома (4.10) имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E}, \quad (4.15)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi \rho_{ext}. \quad (4.16)$$

## 4.2. Линейный отклик среды на электромагнитное воздействие

Для не слишком сильных полей вектор электрической индукции линейным образом зависит от вектора напряженности электрического поля. Соответствующее выражение имеет вид

$$\mathbf{D}(t) = (\hat{\varepsilon} \mathbf{E})(t) = \int_0^{\infty} \varepsilon(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau = \mathbf{E}(t) + 4\pi \int_0^{\infty} \chi(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau. \quad (4.17)$$

Здесь введены диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon$  и восприимчивость среды  $\chi$ , осуществляющая связь между наведенной поляризацией и макроскопическим электрическим полем. Нулевой нижний предел интегрирования в формуле (4.17) отражает принцип причинности: следствие не может опережать причину по времени. Переходя в равенстве (4.17) к Фурье-образам от соответствующих величин, находим

$$\mathbf{D}(\omega) = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) = (1 + 4\pi \chi(\omega)) \mathbf{E}(\omega), \quad (4.18)$$

$$\mathbf{P}(\omega) = \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega). \quad (4.19)$$

Функция  $\chi(\omega)$  описывает линейный отклик среды на монохроматическое поле, она также называется функцией отклика. Фурье-образ диэлектрической восприимчивости определяется равенством

$$\chi(\omega) = \int_0^{\infty} \chi(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau, \quad (4.20)$$

где  $\chi(\tau)$  – действительная функция времени, т.к. она связывает согласно (4.17) действительные величины. С учетом этого из формулы (4.20) вытекает, что

$$\chi(\omega)^* = \chi(-\omega). \quad (4.21)$$

Записывая комплексную функцию  $\chi(\omega)$  через действительную и мнимую части  $\chi(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$  и учитывая равенство (4.21), находим

$$\chi'(\omega) = \chi'(-\omega); \quad \chi''(\omega) = -\chi''(-\omega), \quad (4.22)$$

т.е. действительная часть восприимчивости является четной функцией частоты, а мнимая часть – нечетной. Диэлектрическая восприимчивость среды  $\chi(\omega)$  удовлетворяет тем же соотношениям Крамерса–Кронига, что и динамическая поляризуемость атома (см. выше соотношения (3.55) – (3.56)).

Формула (4.19) связывает поляризацию среды и макроскопическое поле через диэлектрическую восприимчивость вещества. Поляризация среды может быть выражена через *локальное* электрическое поле  $\mathbf{E}_{loc}(j)$ , действующее на  $j$ -й атом в точке его локализации. Тогда отклик на электромагнитное воздействие будет определяться атомной поляризуемостью согласно формуле

$$\mathbf{P} = \sum_j N_j \beta^{(j)} \mathbf{E}_{loc}(j), \quad (4.23)$$

где  $j$  – индекс, нумерующий тип атома;  $\beta^{(j)}(\omega)$  – динамическая поляризуемость и  $N_j$  – концентрация атомов  $j$ -го типа. Чтобы воспользоваться формулой (4.23), нужно знать явное выражение для локального поля  $\mathbf{E}_{loc}$ , которое невозможно выписать в общем виде. Тем не менее в ряде случаев оказывается справедливым следующее выражение (формула Лорентца):

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3} \mathbf{P}. \quad (4.24)$$

Равенство (4.24) справедливо, например, для кубических кристаллов. Второе слагаемое в этой формуле представляет собой так называемое *поле Лорентца*, т.е. электрическое поле, создаваемое на атоме поляризационными зарядами, расположенными на внутренней поверхности фиктивной сферической полости, вырезанной вокруг рассматриваемого атома в диэлектрическом образце. Заметим, что если образец представляет собой однородный диэлектрический шар, помещенный в однородное внешнее поле  $\mathbf{E}_0$ , то локальное поле в его

центре совпадает с внешним полем  $\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_0$ . В этом случае поле Лоренца полностью компенсирует поле, создаваемое поляризационными зарядами на поверхности шара. Из приведенного примера видно, что локальное поле может сильно отличаться от макроскопического. С помощью формул (4.23) – (4.24) и определения диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  (4.18) можно получить связь между величиной  $\varepsilon$  и поляризуемостью атомов среды (формула Клаузиуса–Моссоти):

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3} \sum_j N_j \beta^{(j)} . \quad (4.25)$$

Отсюда следует, что для разреженной среды, когда диэлектрическая проницаемость близка к единице, справедливо приближенное равенство:

$$\varepsilon(\omega) \cong 1 + 4\pi \sum_j N_j \beta^{(j)}(\omega) . \quad (4.26)$$

Из этой формулы для больших частот вытекает выражение для высокочастотной диэлектрической проницаемости. Выпишем его для моноатомной среды:

$$\varepsilon_{\infty}(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{4e^2 N_a Z}{m_e}, \quad (4.27)$$

где  $\omega_p$  – плазменная частота,  $N_a$  – концентрация атомов среды. При выводе (4.27) использовалось выражение для высокочастотной поляризуемости (3.50), в котором число атомных электронов было положено равным заряду ядра в предположении электрической нейтральности атома:  $N_e = Z$ . Равенство (4.27) представляет собой *плазменную формулу для диэлектрической проницаемости*. Действительно, в случае полностью ионизированной плазмы, когда собственные частоты электронов можно считать нулевыми, автоматически выполняется условие высокочастотности, использовавшееся при выводе формулы (3.50), и мы приходим к выражению (4.27). Плазменная формула для диэлектрической проницаемости справедлива и для газа из нейтральных атомов, если частота поля существенно выше потенциала ионизации атома.

### 4.3. Распространение электромагнитной волны в среде

Рассмотрим монохроматическое излучение, напряженность электрического и магнитного поля в котором представляет собой плоскую волну:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t)], \quad (4.28)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t)], \quad (4.29)$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$  и  $\mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)$  – комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного поля. Подставляя выражения (4.28) – (4.29) в уравнения Максвелла (4.6) – (4.7) и (4.15) – (4.16), получаем систему алгебраических уравнений для комплексных амплитуд электромагнитного поля;

$$[\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)] = \frac{\omega}{c} \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega), \quad (4.30)$$

$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)) = 0, \quad (4.31)$$

$$[\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)] = -\frac{\omega}{c} \left( 1 + i \frac{4\pi\sigma}{\omega \varepsilon(\omega)} \right) \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega), \quad (4.32)$$

$$\varepsilon(\omega)(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)) = 0. \quad (4.33)$$

Если выполняется неравенство

$$\omega \varepsilon(\omega) \gg 4\pi\sigma, \quad (4.34)$$

то можно пренебречь вторым слагаемым в круглых скобках правой части равенства (4.32) по сравнению с единицей, и вместо (4.32) получаем

$$[\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)] = -\frac{\omega}{c} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.35)$$

Условие (4.34) является критерием «диэлектричности» среды, что соответствует пренебрежению током проводимости по сравнению с током смещения. В противоположном пределе, когда среда является проводником, из уравнения (4.32) находим

$$[\mathbf{k} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega)] = -i \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.36)$$

Рассмотрим сначала случай диэлектрической среды. Исключая из уравнений (4.30) и (4.35) напряженность магнитного поля, получа-



ем алгебраическое уравнение на комплексную амплитуду электрического поля в плоской волне:

$$\mathbf{k}^2 \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) - \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)) = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.37)$$

При выводе левой части этого равенства была использована известная формула для двойного векторного произведения:  $[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ .

Пусть вектор напряженности электрического поля перпендикулярен волновому вектору, т.е. имеет место случай поперечного поля  $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{k}, \omega)$ . Тогда уравнение (4.37) дает

$$\left( \mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \right) \mathbf{E}_\perp(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (4.38)$$

Отсюда получаем закон дисперсии поперечных электромагнитных волн в диэлектрической среде:

$$\mathbf{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon'(\omega) + i \varepsilon''(\omega)). \quad (4.39)$$

Как видно из последнего равенства, волновой вектор электромагнитного поля в среде, вообще говоря, есть комплексная величина:  $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i \mathbf{k}''$ . В дальнейшем предполагаем, что  $\mathbf{k}' \perp \mathbf{k}''$ , тогда можно записать:

$$\mathbf{k} = \tilde{n}(\omega) \frac{\omega}{c} \mathbf{s} \equiv (n(\omega) + i \kappa(\omega)) \frac{\omega}{c} \mathbf{s}, \quad |\mathbf{s}| = 1. \quad (4.40)$$

Здесь введены действительная  $n(\omega)$  и комплексная  $\kappa(\omega)$  части показателя преломления среды  $\tilde{n}(\omega)$  с учетом их зависимости от частоты. Подставляя (4.40) в (4.39) и отделяя действительную и мнимую части, получаем следующую систему уравнений для действительной и мнимой части комплексного показателя преломления:

$$n^2 - \kappa^2 = \varepsilon', \quad (4.41)$$

$$2 n \kappa = \varepsilon''. \quad (4.42)$$

Решение системы (4.41) – (4.42) имеет вид

$$n = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \varepsilon' + \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} \right)}, \quad (4.43)$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{1}{2} \left( \sqrt{\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2} - \varepsilon' \right)}. \quad (4.44)$$

Если, как это часто бывает в случае диэлектрической среды,  $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$  и  $\varepsilon' > 0$ , то решение (4.43) – (4.44) приближенно равно

$$n \cong \sqrt{\varepsilon'} \left( 1 + \frac{1}{8} \left( \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \right)^2 \right), \quad (4.45)$$

$$\kappa \cong \frac{\varepsilon''}{2\sqrt{\varepsilon'}}. \quad (4.46)$$

Итак, в случае малой величины мнимой части диэлектрической проницаемости комплексный показатель преломления среды дается приближенными равенствами (4.45) – (4.46).

Подставляя волновой вектор (4.40) в уравнение (4.30), находим для комплексной амплитуды напряженности магнитного поля:

$$\mathbf{H}(\mathbf{k}, \omega) = \sqrt{n^2 + \kappa^2} \exp \left[ i \operatorname{arctg} \left( \frac{\kappa}{n} \right) \right] [\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)]. \quad (4.47)$$

Из этого равенства вытекает соотношение между амплитудами и фазами напряженностей электрического и магнитного поля в среде.

Из равенства (4.28) с учетом выражения для волнового вектора (4.40) находим для напряженности электрического поля в плоской волне, распространяющейся в среде:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) \exp \left[ i \frac{\omega n}{c} \left( z - \frac{c}{n} t \right) - \kappa \frac{\omega}{c} z \right], \quad (4.48)$$

где предположено, что  $(\mathbf{s} \cdot \mathbf{r}) = z$ , т.е. электромагнитная волна распространяется в положительном направлении оси  $z$ . Из полученного выражения (4.48) следует, что фазовая скорость плоской волны в среде с показателем преломления  $n(\omega) \neq 0$  равна

$$v_{ph} = \frac{c}{n(\omega)} \cong \frac{c}{\sqrt{\varepsilon'(\omega)}}, \quad (4.49)$$

если же  $n(\omega) = 0$ , то, как это видно из формулы (4.48), исчезает зависимость фазы поля от координаты  $z$ .

Поскольку интенсивность излучения  $I$  пропорциональна квадрату модуля напряженности электрического поля  $I \propto |\mathbf{E}|^2$ , то для зависимости интенсивности от координаты  $z$  (в направлении распространения излучения) можно получить следующее выражение:

$$I(z) = I_0 \exp\left(-2\kappa \frac{\omega}{c} z\right) = (\varepsilon'' \ll \varepsilon') \cong I_0 \exp\left(-\frac{\varepsilon''}{\sqrt{\varepsilon'}} \frac{\omega}{c} z\right), \quad (4.50)$$

т.е. имеет место *затухание* излучения с коэффициентом экстинкции (extinction)  $\alpha_{ext}$ , равным:

$$\alpha_{ext} = 2\kappa \frac{\omega}{c} = (\varepsilon'' \ll \varepsilon') = \frac{\varepsilon''}{\sqrt{\varepsilon'}} \frac{\omega}{c} = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \frac{\omega}{v_{ph}}. \quad (4.51)$$

Случай диэлектрической среды и проводника можно рассматривать единообразно, если произвести следующую замену диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon(\omega) \rightarrow \varepsilon(\omega) + i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (4.52)$$

Для металлов справедливо неравенство, обратное к (4.34), в таком случае, принимая во внимание замену (4.52), можно считать, что

$$\varepsilon' \approx 0 \text{ и } \varepsilon'' \approx \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (4.53)$$

В этом случае из (4.43) – (4.44) следует

$$n = \kappa = \sqrt{\frac{2\pi\sigma}{\omega}}. \quad (4.54)$$

Затухание электромагнитной волны при распространении в среде не обязательно связано с истинным поглощением энергии поля, чему соответствует наличие мнимой части у диэлектрической проницаемости. Коэффициент  $\kappa$ , описывающий затухание интенсивности согласно (4.50), может быть не равен нулю и при  $\varepsilon'' = 0$ , если только  $\varepsilon' < 0$ . Тогда из уравнений (4.41) – (4.42) следует, что  $n = 0$  и  $\kappa \neq 0$ . Такая ситуация имеет место при отражении излучения от плазмы, когда для частот  $\omega < \omega_p$  диэлектрическая проницаемость плазмы является действительной отрицательной величиной (см. формулу (4.27)). Если же  $\omega > \omega_p$ , то диэлектрическая проницаемость плазмы

(4.27) – действительная положительная величина, так что излучение распространяется в плазме без ослабления. Такая ситуация имеет место при прохождении ультрафиолетового излучения через металлы – *ультрафиолетовая прозрачность металлов*. Дело в том, что в металлах вклад электронов проводимости, обладающих нулевыми собственными частотами, в диэлектрическую проницаемость как раз описывается плазменной формулой (4.27). Отражение излучения видимого диапазона от металлов связано с тем, что плазменная частота (4.27) для электронов проводимости лежит выше частотной границы видимого и ультрафиолетового спектра излучения.

Запишем выражение для вектора Пойтинга в среде:

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}], \quad (4.55)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – действительные напряженности полей. Модуль вектора Пойтинга равен интенсивности электромагнитного излучения, т.е. количеству энергии поля, протекающему в единицу времени через единицу площади. Формула (4.55) совпадает с выражением для вектора Пойтинга в вакууме с той разницей, что в (4.55) фигурируют макроскопические поля в среде, так что связь между напряженностью магнитного и электрического поля дается формулой (4.47). Интенсивность монохроматического поля в среде с учетом сказанного равна

$$I(\omega) = \frac{c}{8\pi} |\tilde{n}(\omega)| |\mathbf{E}_0|^2, \quad (4.56)$$

где  $\mathbf{E}_0$  – действительная амплитуда напряженности электрического поля в монохроматическом излучении заданной частоты.

Вычислим дивергенцию от вектора Пойтинга (4.55), воспользовавшись уравнениями Максвелла в среде (4.6), (4.15) и формулой векторного анализа  $\operatorname{div}[\mathbf{a} \times \mathbf{b}] = \mathbf{b} \operatorname{rot} \mathbf{a} - \mathbf{a} \operatorname{rot} \mathbf{b}$ . В результате, предполагая, что свободные заряды отсутствуют, получим следующее выражение:

$$-\operatorname{div} \mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right). \quad (4.57)$$

Поскольку левая часть равенства (4.57) описывает изменение энергии электромагнитного поля за счет выхода излучения за границу выделенного объема, (что следует из формулы Гаусса–Остроградского), то правую часть равенства (4.57) можно отождес-

ствить с изменением энергии электромагнитного поля в единицу времени в единичном объеме. Иными словами, величина

$$q(t) = \frac{1}{4\pi} \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) \quad (4.58)$$

представляет собой мгновенную мощность электромагнитного поля в единице объема, связанную с уменьшением или увеличением энергии поля.

Вычислим с помощью формулы (4.58) среднюю за период мощность, рассеиваемую монохроматическим излучением в среде. Для этого выразим действительные функции времени, фигурирующие в правой части равенства (4.58), через соответствующие комплексные величины по формуле

$$\mathbf{F}(t) = \frac{\mathbf{F}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{F}_0^* e^{i\omega t}}{2} \quad (4.59)$$

и воспользуемся формулой (4.18) для электрической индукции. После усреднения по периоду поля  $T = 2\pi/\omega$  останутся отличными от нуля только произведения величин, содержащих комплексно-сопряженные мнимые экспоненты. В результате для мощности в единице объема получаем следующее выражение:

$$q(\omega) = \frac{\omega}{8\pi} \varepsilon''(\omega) |\mathbf{E}_0|^2 = \frac{\omega}{2} \chi''(\omega) |\mathbf{E}_0|^2. \quad (4.60)$$

Итак, мощность монохроматического излучения, поглощаемая в среде, пропорциональна мнимой части диэлектрической проницаемости (или восприимчивости) вещества. (Магнитные среды, в которых  $\mu \neq 1$  и  $\mu'' \neq 0$ , мы не рассматриваем).

Подчеркнем, что поглощение имеет место, если  $\varepsilon''(\omega)$ ,  $\chi''(\omega) > 0$ . Эти неравенства всегда справедливы для термодинамически равновесной среды в силу закона возрастания энтропии. В случае же термодинамически неравновесной (инвертированной) среды данные неравенства могут иметь обратный знак, тогда электромагнитное излучение будет усиливаться средой.

Определим условия усиления излучения, когда для диэлектрической проницаемости среды справедливо выражение (4.26). Для простоты рассмотрим вклад в восприимчивость атомов одного типа. Обобщим выражение для динамической поляризуемости основного

состояния атома (3.48) на случай атома, находящегося в  $m$ -м состоянии:

$$\beta_m(\omega) = \frac{e^2}{m_e} \sum_n \frac{f_{mn}}{\omega_{nm}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_{nm}}. \quad (4.61)$$

Тогда с учетом заселенности  $m$ -го состояния атома  $N_m$  для восприимчивости среды имеем выражение

$$\chi(\omega) = \sum_m N_m \beta_m(\omega), \quad \sum_m N_m = N_a, \quad (4.62)$$

где  $N_a$  – полная концентрация атомов. Пусть частота электромагнитного излучения близка к одной из собственных частот атома:

$$|\omega - \omega_{nm}| \ll \omega, \quad \omega_{nm} > 0, \quad (4.63)$$

причем  $m \rightarrow n$  – дипольно-разрешенный переход, т.е.  $f_{mn} \neq 0$ . Тогда из формул (4.61), (4.62) следует выражение для резонансной восприимчивости среды:

$$\chi^{(res)}(\omega) = g_m \beta_m^{(res)}(\omega) \left[ \frac{N_m}{g_m} - \frac{N_n}{g_n} \right]. \quad (4.64)$$

При выводе формулы (4.64) было использовано равенство

$$g_m \beta_m^{(res)}(\omega) = -g_n \beta_n^{(res)}(\omega), \quad (4.65)$$

которое следует из соотношения между силами осцилляторов взаимно обратных переходов:  $g_m f_{mn} = -g_n f_{nm}$ . С помощью формул (4.61) и (4.64) и выражения для силы осциллятора (3.39) находим для мнимой части резонансной восприимчивости среды:

$$\left( \chi^{(res)}(\omega) \right)'' = \frac{\pi}{3\hbar} \left| \langle n | \mathbf{d} | m \rangle \right|^2 G_{mn}(\omega) \left[ \frac{N_m}{g_m} - \frac{N_n}{g_n} \right], \quad (4.66)$$

где  $G_{mn}(\omega)$  – спектральная форма линии, которая в случае однородно уширенного перехода дается формулой (3.61).

Таким образом, условие усиления резонансного излучения в среде имеет вид

$$\frac{N_n}{g_n} > \frac{N_m}{g_m}, \text{ при } E_n > E_m. \quad (4.67)$$

Выполнение этого критерия означает инвертированность среды, а величина  $N_n/g_n - N_m/g_m$  называется *инверсией населенности*.

Отношение мощности электромагнитного излучения, выделяемой (диссипируемой) в единице объема среды, к интенсивности излучения имеет размерность обратной длины и называется *коэффициентом усиления* (поглощения):

$$\alpha(\omega) = \frac{q(\omega)}{I(\omega)} = \frac{4\pi\omega}{c} \frac{\chi''(\omega)}{|\tilde{n}(\omega)|}. \quad (4.68)$$

Заметим, что это выражение совпадает с формулой (4.51) для коэффициента экстинкции, если в нем положить  $|\tilde{n}(\omega)| \approx \sqrt{\varepsilon'}$ , что соответствует предположению  $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$ , сделанному при выводе (4.51). В резонансных условиях (4.63) с помощью формулы (4.66) находим для коэффициента усиления (поглощения) монохроматического электромагнитного поля в среде:

$$\alpha(\omega) = \sigma_{mn}(\omega) \left[ \frac{N_m}{g_m} - \frac{N_n}{g_n} \right], \quad (4.69)$$

где  $\sigma_{mn}(\omega)$  – сечение резонансного перехода:

$$\sigma_{mn}(\omega) = \frac{4\pi^2 \omega}{3\hbar c n(\omega)} |\langle n | \mathbf{d} | m \rangle|^2 G_{mn}(\omega). \quad (4.70)$$

Таким образом, как это следует из полученных выражений (4.68) – (4.70), резонансное излучение в среде усиливается, если имеет место инверсия населенностей (4.67) на активном переходе  $m \rightarrow n$ . В противном случае, излучение будет ослабляться за счет поглощения на этом переходе.

## 4.4. Отражение и преломление электромагнитных волн

Рассмотрим распространение плоской электромагнитной волны через плоскую границу раздела двух сред с различными диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  (рис. 3).

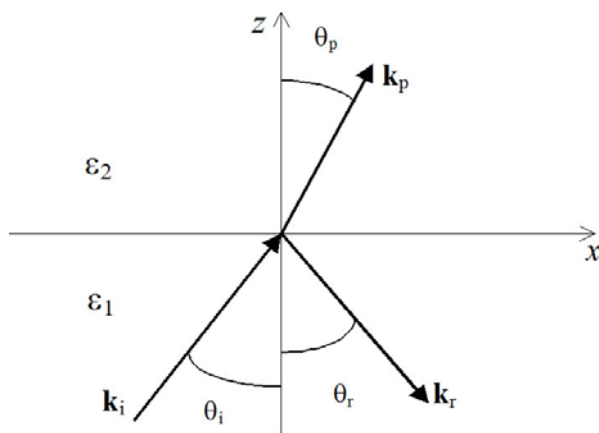


Рис. 4.1. Распространение плоской электромагнитной волны через границу раздела двух сред

Как видно из рис. 3, волне, падающей на границу раздела сред, соответствует индекс «i», отраженной волне соответствует индекс «r» и преломленной волне – индекс «p». Поскольку граница раздела сред лежит в плоскости  $xu$  (ось  $y$  перпендикулярна плоскости рисунка), задача о распространении волны однородна в направлениях, задаваемых осями  $x$  и  $y$ . (Диэлектрическая проницаемость изменяется только вдоль оси  $z$ ). Поэтому функциональная зависимость напряженностей электрического и магнитного поля от переменных  $x$  и  $y$  одинакова во всем пространстве. В частности, если волновой вектор в падающей волне лежит в плоскости  $xz$ , то волновые вектора отраженной и преломленной волн будут лежать в той же плоскости. Таким образом, справедливы равенства

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{px}. \quad (4.71)$$



Из равенств (4.71) следуют (в случае прозрачных сред  $\epsilon_1'' = \epsilon_2'' = 0$ ) известные законы отражения и преломления:

$$\theta_i = \theta_r, \quad \frac{\sin \theta_p}{\sin \theta_i} = \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}. \quad (4.72)$$

Для  $z$  компонент волновых векторов преломленной, падающей и отраженной волн из рис. 3 с учетом равенств (4.71) имеем

$$k_{pz} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1 \sin^2 \theta_i} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2} \cos \theta_p, \quad (4.73a)$$

$$k_{iz} = -k_{pz} = -\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_1} \cos \theta_i, \quad (4.73b)$$

где диэлектрические проницаемости являются, вообще говоря, комплексными величинами.

Свяжем напряженности электрического и магнитного поля в преломленной и отраженной волнах с напряженностями соответствующих полей в падающей волне. Для этого воспользуемся граничными условиями для тангенциальных составляющих электрического и магнитного поля на границе раздела сред:

$$\mathbf{E}_{1\tau} = \mathbf{E}_{2\tau}, \quad \mathbf{H}_{1\tau} = \mathbf{H}_{2\tau}. \quad (4.74)$$

Равенства (4.74) следуют из уравнений Максвелла (4.6) и (4.8), если эти уравнения переписать в интегральной форме, воспользовавшись формулой Стокса.

Разложим вектор напряженности электрического поля на две составляющие:  $\mathbf{E}^{(\perp)}$  – перпендикулярную плоскости падения  $xz$  и  $\mathbf{E}^{(//)}$  – параллельную плоскости падения. Рассмотрим сначала преломление и отражение излучения, поляризованного перпендикулярно плоскости падения. В случае, изображенном на рис. 3, перпендикулярная составляющая напряженности электрического поля направлена вдоль оси  $y$ . Тогда первое из равенств (4.74), примененное к перпендикулярной составляющей электрического поля, дает

$$E_{iy} + E_{ry} = E_{py}. \quad (4.75)$$

Полученное уравнение нужно дополнить уравнением для напряженности магнитного поля. Магнитное поле в плоской волне может

быть выражено через электрическое поле с помощью соотношения (4.30). Тангенциальная составляющая вектора напряженности магнитного поля в геометрии рис. 4.1 направлена вдоль оси  $x$ . Поэтому второе из равенств (4.74) с помощью формулы (4.30) может быть записано в виде:

$$k_{iz} E_{iy} + k_{rz} E_{ry} = k_{pz} E_{py}. \quad (4.76)$$

При записи (4.76) было учтено, что в случае перпендикулярной поляризации падающей волны отличны от нуля только  $y$ -компоненты векторов напряженностей электрического поля. Решая систему уравнений (4.75) – (4.76), находим

$$E_{py} = \frac{2k_{iz}}{k_{iz} + k_{pz}} E_{iy}, \quad E_{ry} = \frac{k_{iz} - k_{pz}}{k_{iz} + k_{pz}} E_{iy}, \quad (4.77)$$

где выражения для  $z$ -составляющих волновых векторов излучения даются формулами (4.73). Для прозрачной среды равенства (4.72) – (4.73) и (4.77) дают

$$E_p^{(\perp)} = \frac{2 \sin \theta_p \cos \theta_i}{\sin(\theta_p + \theta_i)} E_i^{(\perp)}, \quad E_r^{(\perp)} = \frac{\sin(\theta_p - \theta_i)}{\sin(\theta_p + \theta_i)} E_i^{(\perp)}. \quad (4.78)$$

Формулы (4.78) описывают связь напряженности электрического поля в преломленной и отраженной волнах с напряженностью электрического поля в падающей волне в случае перпендикулярной поляризации.

Случай параллельной поляризации падающей электромагнитной волны удобно анализировать в терминах напряженности магнитного поля, вектор которой тогда перпендикулярен плоскости падения  $xz$ . Второе из равенств (4.74) в полной аналогии с уравнением (4.75) дает

$$H_{iy} + H_{ry} = H_{py}. \quad (4.79)$$

Для тангенциальных составляющих вектора напряженности электрического поля, которые в рассматриваемом случае являются  $x$ -проекциями, с помощью уравнений Максвелла можно получить

$$E_x = -\frac{\omega}{ck^2} k_z H_y. \quad (4.80)$$

С учетом соотношения (4.80) условие непрерывности тангенциальной составляющей напряженности электрического поля (первое из равенств (4.74)) дает

$$\frac{k_{iz}}{k_i^2} H_{iy} + \frac{k_{rz}}{k_r^2} H_{ry} = \frac{k_{pz}}{k_p^2} H_{py}. \quad (4.81)$$

В случае прозрачных сред формулы (4.79), (4.81) и (4.72) приводят к следующему результату:

$$H_p^{(//)} = \frac{\sin 2\theta_i}{\sin(\theta_p + \theta_i) \cos(\theta_i - \theta_p)} H_i^{(//)}, \quad H_r^{(//)} = \frac{\operatorname{tg}(\theta_i - \theta_p)}{\operatorname{tg}(\theta_i + \theta_p)} H_i^{(//)}. \quad (4.82)$$

Соотношения (4.78), (4.82) называются *формулами Френеля*. Они были получены в 1821 году на основании упругих представлений о свете до того, как были сформулированы уравнения Максвелла.

Введем коэффициент отражения электромагнитного излучения от границы раздела сред, который по определению равен

$$R = \frac{I_r}{I_i} = \frac{|E_r|^2}{|E_i|^2}, \quad (4.83)$$

где  $I_{i,r}$  – интенсивность падающей и отраженной волны. Связь интенсивности и напряженности электрического поля дается формулой (4.56). В случае нормального падения излучения на границу раздела сред ( $\theta_i = \theta_r = \theta_p = 0$ ) для коэффициента отражения с помощью формул (4.77), (4.83) находим

$$R(\theta = 0) = \left| \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_2}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_2}} \right|^2 = \frac{(n_1 - n_2)^2 + (\kappa_1 - \kappa_2)^2}{(n_1 + n_2)^2 + (\kappa_1 + \kappa_2)^2}. \quad (4.84)$$

Если электромагнитная волна падает из вакуума ( $\tilde{n}_1 = 1$ ) на поверхность вещества с комплексным показателем преломления  $\tilde{n}_2 = n + i\kappa$ , второе из равенств (4.84) дает

$$R = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2}{(n+1)^2 + \kappa^2}. \quad (4.85)$$

В случае нормального падения оптического излучения на границу раздела воздух/стекло, когда  $n_1 \cong 1$ ,  $n_2 \cong 1.5$ , коэффициент отражения в соответствии с формулой (4.85) равен 4%.

Коэффициенты отражения в случае наклонного падения на границу раздела для различных поляризаций излучения можно получить из формул Френеля (4.78), (4.82):

$$R_{\perp} = \frac{\sin^2(\theta_p - \theta_i)}{\sin^2(\theta_p + \theta_i)}, \quad (4.86)$$

$$R_{\parallel} = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_p - \theta_i)}{\operatorname{tg}^2(\theta_p + \theta_i)}. \quad (4.87)$$

Данные выражения описывают зависимость коэффициентов отражения от угла падения, если учесть второе равенство в формуле (4.72). Из выражения (4.87) для коэффициента отражения параллельно поляризованного излучения следует, что если  $\theta_i + \theta_p = \pi/2$ , то  $R_{\parallel} = 0$ , и отраженная волна отсутствует. Вышеприведенное условие с помощью (4.72) можно переписать в виде

$$\operatorname{tg}\theta_i = \frac{n_2}{n_1}. \quad (4.88)$$

Угол, определяемый равенством (4.88), называется *углом Брюстера* ( $\theta_B$ ). Таким образом, при падении излучения на границу раздела сред под углом Брюстера отраженная волна оказывается полностью поляризованной в направлении, перпендикулярном плоскости падения. При этом волновые векторы преломленной и отраженной волны оказываются взаимно перпендикулярными. Данное обстоятельство позволяет дать простую интерпретацию отсутствия отраженной волны при падении параллельно поляризованного излучения под углом Брюстера. Действительно, в случае  $\theta_i = \theta_B$  вектор напряженности электрического поля преломленной волны, поляризованной в плоскости падения, оказался бы параллелен волновому вектору отраженной волны. Но тогда преломленная волна не смогла бы вызвать переменную поляризацию во второй среде, послужившую бы источ-

ником отраженной волны, поскольку диполь не излучает в направлении вектора своего дипольного момента.

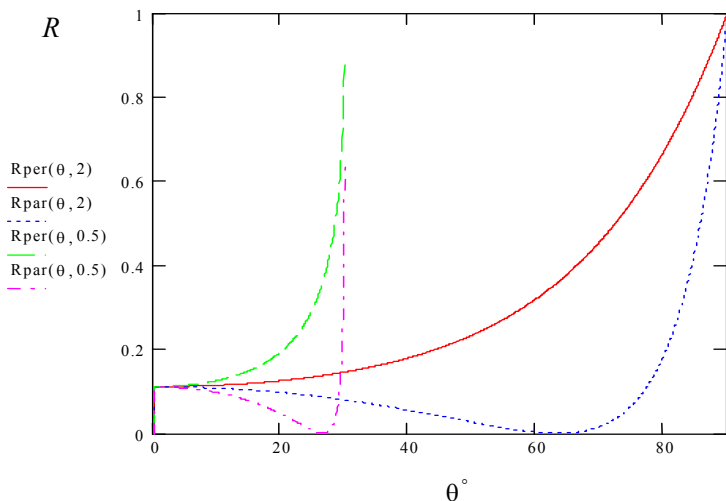


Рис. 4.2. Коэффициент отражения излучения от границы раздела сред при перпендикулярной и параллельной поляризации как функция угла падения для двух значений относительного показателя преломления:  $n^{(r)} = 2$  и  $n^{(r)} = 0,5$

На рис. 4.2 приведены зависимости коэффициентов отражения перпендикулярно и параллельно-поляризованной волны от угла падения для двух значений относительного коэффициента преломления  $n^{(r)} \equiv n_2/n_1$ . Видно, что коэффициент отражения для перпендикулярной поляризации излучения всегда больше коэффициента отражения при параллельной поляризации. Таким образом, в отраженном естественном свете всегда преобладает перпендикулярная поляризация, а в преломленном излучении доминирует параллельная.

В случае параллельной поляризации излучения угловая зависимость коэффициента отражения имеет нулевой минимум при угле падения, равном углу Брюстера. Угол Брюстера возрастает с ростом относительного коэффициента преломления в соответствии с выражением (4.88). Так, при  $n^{(r)} = 2$  угол Брюстера примерно равен  $63,4$

градуса, а при  $n^{(r)} = 0,5 - 26,6^\circ$ .

Другое важное обстоятельство, вытекающее из рис. 4.2, заключается в том, что если относительный показатель преломления меньше единицы, то существует такой угол  $\theta_0$  (*угол полного внутреннего отражения*), определяемый равенством

$$\sin \theta_0 = n^{(r)} \equiv \frac{n_2}{n_1}, \quad (4.89)$$

при котором угол преломления равен  $90$  градусов. Иными словами, при углах падения  $\theta_i > \theta_0$  преломленная волна отсутствует, происходит полное внутреннее отражение. Если  $n^{(r)} = 0.5$ , то угол полного внутреннего отражения равен  $30$  градусам. Отметим, что для углов падения  $\theta_i > \theta_0$  проекция волнового вектора в преломленной волне на нормаль к границе раздела чисто мнимая величина (см. первое равенство в формулах (4.73)), и электромагнитная волна во второй среде затухает. Это затухание, однако, не связано с поглощением энергии средой, поскольку истинное поглощение энергии определяется мнимой частью диэлектрической проницаемости (4.60), которая по предположению о прозрачности сред равна нулю. Если вычислить поток энергии излучения из первой среды во вторую при наличии полного внутреннего отражения, то он окажется равным нулю. Таким образом, в данном случае действительно имеет место полное отражение падающей волны от границы раздела, при котором  $R_\perp = R_\parallel = 1$ .

Пользуясь формулами Френеля (4.78) и (4.82), можно проследить изменение поляризации излучения при прохождении границы раздела сред. В тривиальном случае нормального падения поляризация не изменяется. Поляризация не изменяется также, если вектор напряженности электрического поля параллелен или перпендикулярен плоскости падения. При наклонном падении угол между плоскостью падения и вектором напряженности электрического поля увеличивается для преломленной волны и уменьшается для отраженной волны.

Из выражений (4.78), (4.82) также следует характер изменения фазы излучения при пересечении границы раздела сред. В рассматриваемом случае прозрачных сред, когда коэффициенты пропорциональности между напряженностями полей в формулах Френеля вещественны, изменение фазы может быть либо нулевым, либо равнятьсяся

$\pi$  в зависимости от знаков соответствующих коэффициентов в (4.78), (4.82). Коэффициент связи между напряженностью поля в падающей и прошедшей волне всегда положителен, так что фаза излучения при преломлении не меняется. При отражении фаза может измениться. Например, в случае нормального падения фаза отраженной волны изменяется на  $\pi$  радиан, если  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ , и не изменяется в противном случае.

Приведенное выше рассмотрение проведено в предположении скачкообразного изменения диэлектрической проницаемости на границе раздела сред. В действительности всегда имеется переходной слой вещества конечной толщины  $\delta$ , величина которого порядка межатомного расстояния в средах. Таким образом, формулы Френеля справедливы при соблюдении неравенства  $\lambda \gg \delta$  ( $\lambda$  – длина волны), которое выполняется в условиях применимости макроскопического подхода к описанию электромагнитного поля в среде. Если же справедливо обратное неравенство, соответствующее критерию геометрической оптики, тогда излучение может быть описано с помощью лучей, распространяющихся через границу раздела сред без отражения.

Явление полного внутреннего отражения излучения на границе раздела сред используется в *оптических волокнах* для передачи информации на большие расстояния, целей оптоэлектроники и передачи световой энергии. Оптическое волокно состоит из сердцевины, являющейся «проводником» фотонов и оболочки, служащей отражателем фотонов. Показатель преломления сердцевины оптоволокна больше показателя преломления оболочки, так что при не слишком малых углах падения излучения на поверхность сердцевины изнутри имеет место полное внутреннее отражение. Таким образом, электромагнитная волна «канализуется» вдоль сердцевины оптического волокна с малыми потерями энергии. Так, в оптических волокнах на основе  $\text{SiO}_2$  потери составляют до 0.2 дБ/км, а полоса пропускания до 100 ГГц/км.

Наряду с оптоволокном в последнее время в технических приложениях используются *фотонные кристаллы* – материалы с периодическим изменением диэлектрической проницаемости среды на расстояниях порядка длины волны излучения в оптическом и ближнем инфракрасном диапазонах. Распространение электромагнитной волны в таких периодических структурах сопровождается отражением от плоскостей симметрии вещества подобно тому, как это происходит с

электронами в кристаллах. В результате возникают «фотонные запрещенные зоны», т.е. диапазоны длин волн, порядка периода структуры фотонного кристалла, в которых невозможно распространение электромагнитного излучения. Таким образом, фотонный кристалл, прозрачный для широкого спектра электромагнитного излучения, оказывается непрозрачным в спектральном диапазоне, определяемом структурой кристалла. Фотонные запрещенные зоны – оптический аналог электронных запрещенных зон в полупроводниках. Наличие запрещенных зон позволяет использовать фотонный кристалл как волновод. Для этого внутри фотонного кристалла нужно создать волноводную полость, по которой может распространяться излучение. Если частота излучения лежит в фотонной запрещенной зоне, то оно не сможет покинуть пределы полости, поскольку в окружающей среде распространение электромагнитной волны невозможно. Такого рода волновод имеет определенные преимущества перед оптоволоконным волноводом. Действительно, если оптическое волокно согнуть под прямым углом, то угол падения излучения из вещества сердцевины на оболочку оптоволокна будет слишком мал, и потери излучения значительно возрастут. Этого не произойдет при распространении электромагнитной волны по фотонно-кристаллическому волноводу, который будет удерживать излучение при любых углах изгиба.

Помимо наличия запрещенных зон, фотонные кристаллы имеют ряд новых свойств по сравнению с традиционными оптическими материалами, что позволяет их использовать в качестве высокоэффективных светодиодов, трехмерных зеркал с высокой отражающей способностью и т. д. Одномерные фотонные кристаллы известны уже достаточно давно. К ним относятся различного рода многослойные покрытия, используемые в качестве диэлектрических зеркал и фильтров. Простейшим примером такого рода является брэгговский отражатель, представляющий собой последовательность пары плоскопараллельных пластин с толщинами  $d_{1,2}$  и показателями преломления  $n_{1,2}$ . Пространственный период брэгговского отражателя равен

$$D = d_1 + d_2. \quad (4.90)$$

Для получения условия отражения электромагнитной волны удобно ввести средний показатель преломления брэгговского отражателя по формуле



$$\bar{n} = \frac{n_1 d_1 + n_2 d_2}{D}. \quad (4.91)$$

Условие отражения Брэгга для плоской световой волны, падающей на отражатель Брэгга по нормали к его поверхности, имеет вид

$$2k = \kappa = \frac{2\pi}{D}, \quad (4.92)$$

где  $\kappa$  – модуль вектора обратной решетки среды отражателя, а

$$k = \bar{n} \frac{\omega}{c} \quad (4.93)$$

– эффективный волновой вектор излучения в среде брэгговского отражателя. При записи формулы (4.92) учтено, что отражение излучения, падающего по нормали к границе раздела сред, сопровождается изменением знака проекции волнового вектора на нормаль.

Равенства (4.90) – (4.93) дают следующее условие на частоту эффективного отражения:

$$\omega_0 = \frac{\pi c}{n_1 d_1 + n_2 d_2} = \frac{\pi c}{D \bar{n}}. \quad (4.94)$$

Вблизи этой частоты коэффициент отражения рассматриваемой слоистой структуры равен единице.

Брэгговское отражение можно интерпретировать как появления фотонной запрещенной зоны в одномерном фотонном кристалле, о чем говорилось выше. Спектр отражения света от брэгговского отражателя вместе с некоторыми другими связанными с ним зависимостями представлены на рис. 4.3. Этот рисунок, а также формулы (4.90) – (4.94) взяты из статьи М. Калитеевского, помещенной на интернет-сайте [11].

Из выражения (4.94) вытекает, что положение фотонной запрещенной зоны определяется периодом фотонного кристалла. В структуре с периодом один сантиметр фотонная запрещенная зона может возникнуть для частоты порядка 10 ГГц, фотонный кристалл для видимого диапазона должен иметь период порядка 100 нм, а обычный кристалл (например, NaCl) является фотонным кристаллом для рентгеновского излучения.

В заключение отметим, что большой интерес к использованию фотонных кристаллов стимулируется бурным развитием технологий

создания искусственных структур с размерами, лежащими в диапазоне длин волн видимого и инфракрасного излучения.

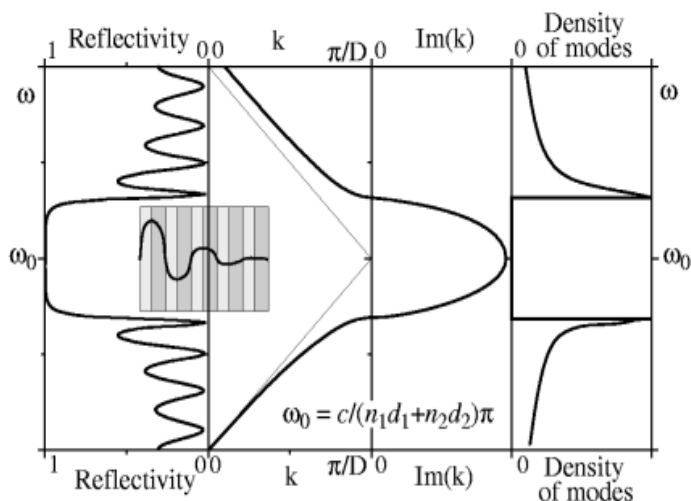


Рис. 4.3. Спектр отражения электромагнитного излучения от брэгговского отражателя (1-я (левая) четверть рисунка). Профиль поля электромагнитной волны в толще брэгговского отражателя (вставка). Дисперсионная зависимость для света в брэгговском отражателе (2-я четверть рисунка). Тонкой линией показана дисперсия свободного фотона. Спектральная зависимость мнимого волнового вектора в области фотонной запрещенной зоны (3-я четверть рисунка). Спектр плотности фотонных состояний в брэгговском отражателе (4-я четверть рисунка)

## ГЛАВА 5. СПЕКТРОСКОПИЯ БЛИЖНЕГО ПОЛЯ

### 5.1. Электромагнитное поле в дальней и ближней зонах

Зависимость электромагнитного поля от расстояния от точечного источника излучения имеет две характерные области: область дальнего поля и область ближнего поля. Область дальнего поля отвечает расстояниям, большим по сравнению с длиной световой волны, тогда как область ближнего поля – малым расстояниям. Наиболее подробно в литературе рассмотрена область дальнего поля, поскольку именно она ответственна за формирование электромагнитной волны, исходящей от источника и наблюдаемой на больших расстояниях в виде самостоятельно распространяющегося излучения. Это излучение переносит энергию от источника и формирует известные зависимости интенсивности электромагнитного излучения. Для дипольного излучения эта зависимость интенсивности имеет хорошо известный вид:

$$I = \frac{2}{3} \frac{|\ddot{\mathbf{d}}|^2}{c^3}, \quad (5.1)$$

где  $\mathbf{d}$  дипольный момент источника излучения,  $c$  – скорость света. Соответственно, вектор плотности потока излучения – вектор Пойтинга – спадает с расстоянием от источника  $r$  как  $r^{-2}$ , так что интеграл от него по сфере с радиусом  $r$  приводит к исчезновению зависимости интенсивности от расстояния в соответствии с формулой (5.1).

Электромагнитное поле, сформированное на больших расстояниях, способно распространяться в вакууме независимо от источника излучения (поле «оторвано» от источника). Это так называемая волновая зона излучения. Напротив, поле на малых расстояниях (внутри волновой зоны) непосредственно связано с колеблющимся источником и не может существовать независимо от него. Напряженность электромагнитного поля (а, тем самым, и его интенсивность) резко возрастают по мере приближения к источнику излучения. Для дипольного излучения это нарастание описывается полем колеблющегося диполя, возрастающим по закону  $r^{-3}$  и намного превышающим поле в волновой зоне.

Атомы, молекулы или нанообъекты, находящиеся на расстояниях от излучающего диполя, много меньших длины световой волны,

испытывают воздействие именно этого сильного внутриволнового поля, приводящего к их возбуждению. Последующее высвечивание этих возбужденных объектов регистрируется наблюдателем уже в волновой зоне на расстояниях, больших длины световой волны. Конечно, в этой дальней зоне указанные объекты могут возбуждаться также и полем электромагнитной волны в волновой зоне, однако интенсивность этой волны на много порядков ниже интенсивности волны в ближней зоне, так что основное возбуждение (а вместе с ним и излучение) нанообъектов происходит именно внутри волновой зоны. Это обстоятельство является основой спектроскопии ближнего поля. Типичным инструментом этого метода является микроскоп ближнего поля, представляющий собой кварцевую иглу, присоединенную к световоду. Лазерное излучения, проходя по световоду, создает на конце иглы поляризацию среды, представляющую собой диполь, колеблющийся с частотой лазерного излучения. Атомные, молекулярные или нанообъекты, находящиеся на расстояниях от кончика иглы, меньших длины световой волны (в ближнем поле излучения), интенсивно возбуждаются этим ближнеполевым полем. Последующее высвечивание (флюоресценция) этих объектов регистрируется наблюдателем. Перемещая иглу вдоль исследуемой поверхности можно получить ее структуру с разрешением, значительно превышающим длину световой волны.

Рассмотрим более детально структуру электромагнитного поля, создаваемого источником излучения с плотностью заряда  $\rho$  и плотностью тока  $j$ , сосредоточенных в области объемом  $V$  с характерным размером  $L$ . Размер  $L$  будем считать малым по сравнению с длиной световой волны  $\lambda$ . Тогда можно воспользоваться разложением потенциалов, определяющих электромагнитное поле, по двум малым параметрам [13]:

$$\frac{L}{r} \ll 1, \frac{2\pi L}{\lambda} \ll 1. \quad (5.2)$$

Выражения для скалярного и векторного потенциалов имеют стандартный вид:

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV', \\ \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV'.\end{aligned}\quad (5.3)$$

где  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = [r^2 + r'^2 - 2(\mathbf{r}\mathbf{r}')]^{1/2}$  – расстояние от точки наблюдения до точки внутри излучающей области (см. рис. 5.1).

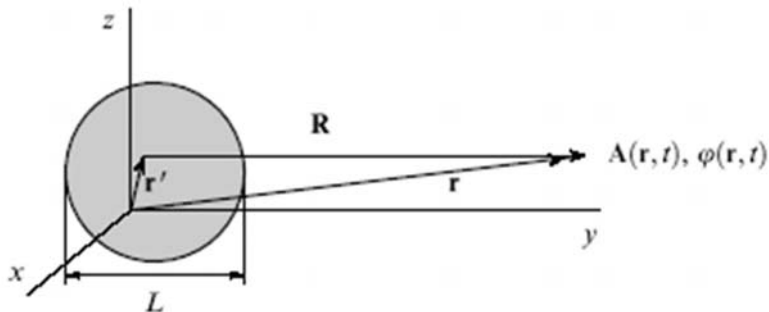


Рис. 5.1. Радиусы-векторы излучающей области  $V$   $\mathbf{r}'$  и точки наблюдения  $\mathbf{r}$

Используя малость размеров излучающей зоны, можно произвести в формуле (5.3) разложения в ряд по малым параметрам:

$$\frac{r'}{r} \leq \frac{L}{r} \ll 1, \quad \frac{2\pi r'}{\lambda} \leq \frac{2\pi L}{\lambda} \ll 1. \quad (5.4)$$

Так, обратное расстояние между точками в излучающей и наблюдаемой областях дается разложением:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cong \frac{1}{r} + \frac{(\mathbf{r}'\mathbf{n})}{r^2}, \quad (5.5)$$

$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{R}{c}\right) \cong \rho\left(\mathbf{r}', \tau + \frac{(\mathbf{r}'\mathbf{n})}{c}\right) \cong \rho(\mathbf{r}', \tau) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', \tau)}{\partial \tau} \frac{(\mathbf{r}'\mathbf{n})}{c},$$

где  $\tau = t - r/c = t - t_r$ ,  $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ .

Подставляя это разложение в формулу для скалярного потенциала и удерживая только члены первого порядка малости, получим выражение

$$\phi(\mathbf{r}, t) \cong \phi_m(\mathbf{r}, \tau) + \phi_d(\mathbf{r}, \tau) + \phi_{rad}(\mathbf{r}, \tau), \quad (5.6)$$

где первый член определяется кулоновским потенциалом полного заряда системы:

$$\phi_m(r, \tau) = \frac{1}{r} \int_V \rho(r', \tau) dV' = \frac{e(\tau)}{r}, \quad (5.7)$$

В рассматриваемом случае электрически нейтральной излучающей системы этот член равен нулю.

Второе слагаемое описывает потенциал полного электрического дипольного моменты излучающей системы:

$$\phi_d(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r^2} \int_V (\mathbf{r}' \mathbf{n}) \rho(\mathbf{r}', \tau) dV' = \frac{(\mathbf{d}(\tau) \mathbf{n})}{r^2}. \quad (5.8)$$

Наконец, третий член определяется осциллирующим переменным дипольным моментом и представляет собой скалярный потенциал поля излучения

$$\phi_{rad}(r, \tau) = \frac{1}{r} \int_V \frac{(\mathbf{r}' \mathbf{n})}{c} \dot{\rho}(r', \tau) dV' = \frac{(\dot{\mathbf{d}}(\tau) \mathbf{n})}{cr} \quad (5.9)$$

При разложении векторного потенциала первый не исчезающий член определяется током излучающей системы частиц, зависящим от их скоростей, сумма которых выражается, в свою очередь, через производные по времени от координат, т.е. от полного дипольного момента системы:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c} \int_V \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dV' \cong \frac{1}{cr} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}', \tau) dV' = \\
&= \frac{1}{cr} \int_V \sum_i e_i \mathbf{v}_i(\tau) \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_i) dV' = \\
&= \frac{1}{cr} \sum_i e_i \mathbf{v}_i(\tau) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(\tau)}{cr} = \mathbf{A}_{rad}(\mathbf{r}, t)
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Скалярный и векторный потенциалы связаны простыми соотношениями:

$$\mathbf{A}_{rad}(\mathbf{r}, \tau) = \frac{\dot{\mathbf{d}}(\tau)}{cr}, \quad \phi_{rad}(\mathbf{r}, \tau) = (\mathbf{n} \mathbf{A}_{rad}(\mathbf{r}, \tau)) \tag{5.11}$$

Таким образом, все характеристики нашей излучающей системы выражаются через ее дипольный момент.

## 5.2. Зависимость от расстояния от источника полей в дальней и ближней зонах

Напряженности электрического и магнитного полей связаны со скалярным и векторным потенциалами соотношениями:

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\dot{\mathbf{A}}}{c}, \quad \mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}], \tag{5.12}$$

Конкретные вычисления зависимостей этих полей от расстояний основаны на взятии пространственных производных (градиентов) с помощью общих формул векторного анализа (детали расчетов содержатся в [5]). Особенно простыми оказываются производные векторного потенциала по времени, непосредственно следующие из формулы (5.10):

$$-\frac{\dot{\mathbf{A}}_{rad}}{c} = -\frac{\ddot{\mathbf{d}}}{c^2 r}. \tag{5.13}$$

Складывая все члены, возникающие при дифференцировании в формуле (5.12), можно получить разложение напряженностей полей по обратным степеням расстояния от излучающего объекта до точки наблюдения. Члены этого разложения удобно представить в виде суммы членов, быстро и медленно спадающих с расстоянием. Первые из них формируют поле в ближней ( $N - \text{nearest}$ ) зоне, тогда как вторые – в дальней ( $F - \text{far}$ ) зоне. Таким образом, указанное разложение имеет вид:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}_F(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}_N(\mathbf{r}, t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{B}_F(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}_N(\mathbf{r}, t)\end{aligned}\quad (5.14)$$

Здесь медленно спадающие с расстоянием члены ответственны за формирование поля в дальней (волновой) зоне:

$$\mathbf{E}_F(\mathbf{r}, t) = \frac{[[\ddot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]]}{c^2 r}, \quad \mathbf{B}_F(\mathbf{r}, t) = \frac{[\dot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]}{c^2 r}, \quad (5.15)$$

Члены, более быстро спадающие с расстоянием, определяют поле в ближней зоне:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_N(\mathbf{r}, t) &= \frac{-\dot{\mathbf{d}} + 3\mathbf{n}(\dot{\mathbf{d}}\mathbf{n})}{cr^2} + \frac{-\mathbf{d} + 3\mathbf{n}(\mathbf{d}\mathbf{n})}{r^3}, \\ \mathbf{B}_N(\mathbf{r}, t) &= \frac{[\dot{\mathbf{d}}\mathbf{n}]}{cr^2}\end{aligned}\quad (5.16)$$

Часть ближнего поля определяется первой производной дипольного момента по времени и исчезает в стационарном случае.

Уход энергии из излучающей системы определяется величинами полей на больших расстояниях и связан, очевидно, с дальним волновым полем. Вектор Умова-Пойтинга дальнего поля равен:

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}_F \mathbf{B}_F] = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n} \mathbf{B}_F^2 = \mathbf{n} \frac{c}{4\pi} \frac{|\dot{\mathbf{d}}|^2}{c^4 r^2} \sin^2 \theta. \quad (5.17)$$



Интегрируя это выражение по сфере, окружающей излучающую систему, найдем:

$$I = \oint_{\sigma} (\mathbf{S} d\sigma) = \frac{|\ddot{\mathbf{d}}|^2}{4\pi c^3 r^2} \int_0^{2\pi} r d\alpha \int_{-1}^1 r \sin^2 \theta d \cos \theta = \frac{2|\ddot{\mathbf{d}}|^2}{3c^3}, \quad (5.18)$$

т.е. известное выражение для интенсивности дипольного излучения системы.

Это дальнейшее поле формирует свет, исходящий от излучающей системы (например, конца кварцевой иглы). Такое поле отвечает стандартному дифракционному пределу, не позволяющему выйти в пространственном разрешении за рамки длины световой волны.

Возможность такого выхода целиком обусловлена существованием ближнего поля. Это поле не вносит вклада в поток энергии излучающей системы на больших расстояниях ввиду его резкого спада с расстоянием. Однако, именно оно ответственно за возбуждение нано-объектов, находящихся на расстояниях от источника излучения, меньших длины световой волны.

Сравним величину напряженностей электрических полей ближнего и дальнего поля. Оценивая временные производные и величину дипольного момента, осциллирующего с частотой  $\omega$ , с помощью соотношений

$$\frac{\dot{d}}{c} \approx \frac{\omega}{c} d = \frac{2\pi}{\lambda} d, \quad \frac{\ddot{d}}{c^2} \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 d = \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 d \quad (5.19)$$

получим оценки доля напряженностей полей в дальней и ближней зонах

$$E_F \approx \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{d}{r}, \quad (5.20)$$

$$E_N \approx \left( \frac{2\pi}{\lambda} \right) \frac{d}{r^2} + \frac{d}{r^3} \cong \frac{d}{r^3}$$

Их отношение определяется выражением

$$\frac{E_N}{E_F} \approx \frac{\lambda^2}{4\pi^2 r^2} \approx 1. \quad (5.21)$$

Видно, что на расстояниях, малых по сравнению с длиной световой волны, (внутри волновой зоны), ближнее поле существенно пре-

вышает дальнейшее. Именно это обстоятельство лежит, как отмечалось выше, в основе спектроскопии ближнего поля.

Как следует из формулы (5.21) отношение напряженностей полей определяется квадратом отношения длины волны к расстоянию до возбуждаемого объекта. Если возбуждение объекта происходит резонансным образом, то вероятности возбуждения пропорциональны квадратам напряженности, т.е. интенсивности, полей. Таким образом, отношение вероятностей процессов в полях ближней и дальней интенсивностей соотносится как четвертая степень отношения (5.21). В действительности существуют процессы более высокого порядка по интенсивности излучения (рамановское рассеяние и др.), которые содержат, таким образом, еще более высокие степени отношения (5.21), что позволяет достичь чрезвычайно большого возрастания вероятностей в таких процессах (на 10 и более порядков величины).

### 5.3. Сканирующая оптическая микроскопия ближнего поля

#### *Эванесцентные волны*

Обычная микроскопия является микроскопией дальнего поля. Это означает, что расстояние между объектом и объективной линзой, а также между изображением и окулярной линзой много больше длины волны света. Поэтому в формировании изображения анализируемого объекта участвуют только распространяющиеся световые волны. Амплитуда таких волн либо остается постоянной (плоская волна), либо изменяется как обратный квадрат расстояния (сферическая волна).

Наряду с распространяющимися световыми волнами в нанооптике большую роль играют уже упоминавшиеся ранее *эванесцентные* волны, амплитуда которых экспоненциально убывает с расстоянием.

Эванесцентное поле может быть описано плоской волной вида

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp \{ i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t) \}, \quad (5.22)$$

в которой, по крайней мере, одна компонента волнового вектора  $\mathbf{k}$  (например,  $k_z$ ) является мнимой величиной. Тогда при распространении вдоль оси  $z$  волна (2.22) будет затухать экспоненциально.

Эванесцентные волны играют важную роль в понимании особенностей оптических полей, ограниченных в пространстве субволновыми размерами. Для их возникновения необходима оптическая неоднородность среды. Простейшим примером такой неоднородности является плоская граница раздела между двумя средами, характеризующимися различными значениями диэлектрической и магнитной проницаемости ( $\varepsilon_{1,2}$  и  $\mu_{1,2}$ ) и соответственно различными показателями преломления  $n_{1,2} = \sqrt{\varepsilon_{1,2} \mu_{1,2}}$ . Предположим, что плоская волна (5.22) падает на границу раздела из среды «1», обладающей большим показателем преломления  $n_1 > n_2$ , под углом  $\theta_1$  к нормали. Среда с большим показателем преломления называется оптически более плотной. Тогда для генерации эванесцентного поля нужно, чтобы угол падения  $\theta_1$  был больше угла полного внутреннего отражения  $\theta_c$  (критический угол):

$$\theta_1 > \theta_c = \arcsin\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right), \quad (5.23)$$

где  $\tilde{n} = n_1/n_2$  – относительный показатель преломления.

Угол полного внутреннего отражения между стеклом ( $n_1 = 1,5$ ) и воздухом ( $n_2 = 1$ ) равен  $\theta_c = 41,8^\circ$ .

Проекции волнового вектора на нормаль к поверхности раздела в первой и второй среде равны:

$$k_{1z} = k_1 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1}, \quad k_{2z} = k_2 \sqrt{1 - \tilde{n}^2 \sin^2 \theta_1}, \quad (5.24)$$

где  $k_{1,2} = 2\pi n_{1,2}/\lambda$  – модули волновых векторов в 1 и 2 среде.

При записи второго равенства (5.24) был использован закон Снеллиуса. При выполнении неравенства (5.23) проекция волнового вектора  $k_{2z}$  становится чисто мнимой величиной, и поле излучения во второй среде будет экспоненциально затухать вдоль оси  $z$  при удалении от плоскости раздела:

$$\mathbf{E}_2(z, t) = \mathbf{E}_{02} \exp\{-\kappa z\} \exp(-i\omega t), \quad (5.25)$$

где  $E_{02}$  – амплитуда напряженности поля во второй среде.

В (5.25) опущена зависимость поля от координат в плоскости раздела, которая описывается действительными проекциями волнового вектора на плоскость раздела. Величина константы затухания  $\kappa$  следует из второго равенства (5.24):

$$\kappa = k_2 \sqrt{\tilde{n}^2 \sin^2 \theta_1 - 1}, \quad \theta_1 > \theta_c. \quad (5.26)$$

Отсюда, в частности, вытекает, что величина константы затухания увеличивается с ростом угла падения.

Таким образом, при падении плоской волны из оптически более плотной в оптически менее плотную среду под углом, большим угла полного внутреннего отражения (5.23), преломленная волна будет экспоненциально затухать вдоль оси  $z$  и распространяться без ослабления вдоль границы раздела. (Полагаем, что поглощением излучения в обеих средах можно пренебречь). Например, при угле падения 45 градусов из стекла в воздух равенство (5.26) дает константу затухания  $\kappa = 2,22/\lambda$ , т.е. уже на расстоянии, равном половине длины волны (в вакууме) от границы раздела поле, примерно в  $e \cong 2,718$  раз меньше, чем на самой границе. На расстоянии порядка двух длин волн эванесцентное поле становится пренебрежимо малым.

Итак, эванесцентное поле существует во второй среде вблизи плоскости раздела на расстоянии порядка четверти длины волны. Важно подчеркнуть, что при этом поток энергии из первой среды во вторую отсутствует.

### *Эксперимент по регистрации эванесцентной волны*

Интенсивность эванесцентной волны можно регистрировать с помощью диэлектрического субволнового острия, сигнал с которого через оптический волновод поступает на детектор. Такое устройство, изображенное на рис. 5.2, называется *сканирующим туннельным фотонным микроскопом* (СТФМ) из-за его аналогии с электронным туннельным микроскопом. В сочетании со спектрометром СТФМ обладает большими возможностями для поверхностной спектроскопии и флуоресцентной микроскопии, поскольку позволяет регистрировать спектры приповерхностной области образца с субволновым пространственным разрешением. Образцы для таких исследований должны обладать достаточно ровной поверхностью с малой флуктуацией

коэффициента преломления, чтобы минимизировать возмущение эванесцентной волны. В противном случае для углов вблизи критического угла падения (5.23) помимо эванесцентной волны будет возникать распространяющаяся волна в результате рассеяния падающей на флуктуациях показателя преломления и неровностях поверхности. СТФМ был использован А. Майксером (A.J.Meixner) с соавторами для исследования стоячей эванесцентной волны, возбуждаемой на верхней поверхности стеклянной призмы излучением аргонного лазера (рис. 5.2) в условиях полного внутреннего отражения [2]. (Аргонный лазер генерирует излучение на длине волны (в вакууме) 514.5 нм).

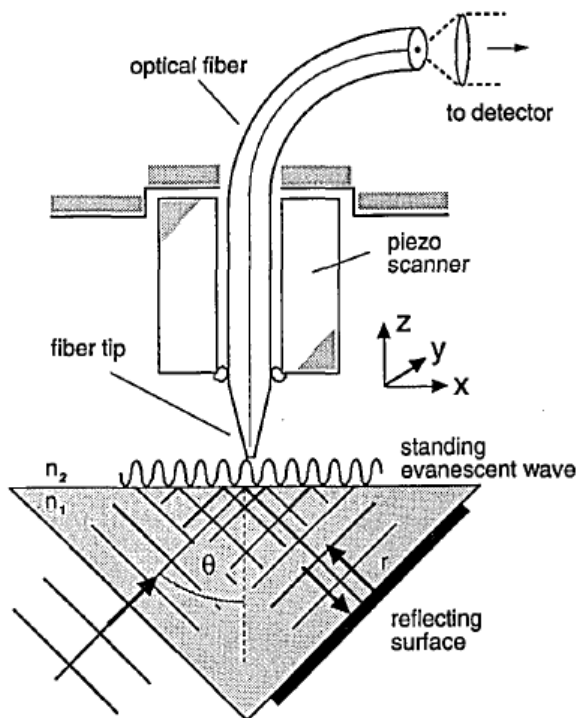


Рис. 5.2. Схема регистрации фотонов стоячей эванесцентной волны, связанной с верхней поверхностью призмы, при помощи сканирующего туннельного фотонного микроскопа

Как следует из рис. 5.2, в данной схеме стоячая эванесцентная волна возбуждается в результате интерференции двух противоположно направленных эванесцентных волн, бегущих вдоль оси  $x$ . Угол призмы составляет  $90^\circ$ , и правая ее грань покрыта отражающим покрытием. Острые оптоволоконна рассеивает эванесцентное поле и создает распространяющиеся в волокне волны, которые могут быть зарегистрированы с помощью детектора в дальней волновой зоне.

Для квадрата модуля амплитуды поля невозмущенной эванесцентной волны на поверхности призмы ( $z = 0$ ) из граничных условий следует выражение

$$|E_{02}|^2 = \frac{4n_1^2 \cos^2 \theta_1}{n_1^2 - n_2^2} |E_{0i}|^2, \quad (5.27)$$

где  $E_{0i}$  – амплитуда напряженности электрического поля в падающей волне,  $\theta_1$  – угол падения. Равенство (5.27) получено для случая, когда вектор напряженности электрического поля в падающей волне перпендикулярен плоскости падения. Для критического угла падения из (2.22) следует, что

$$\cos^2 \theta_c = \frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}. \quad (5.28)$$

Подставляя (5.28) в (5.27), находим  $|E_{02}|^2 = 4|E_{0i}|^2$ , т.е. амплитуда напряженности электрического поля эванесцентной волны на границе раздела для критического угла падения в два раза больше амплитуды напряженности поля в падающей волне. Это связано с тем, что в рассматриваемой ситуации вектор напряженности поля в отраженной волне равен вектору напряженности в падающей волне и параллелен плоскости падения. Поэтому условие непрерывности параллельной поверхности раздела компоненты вектора напряженности электрического поля приводит к тому, что  $\mathbf{E}_{02} = 2\mathbf{E}_{01}$ . В случае, когда угол падения равен  $90^\circ$ , вектор поля в отраженной волне антипараллелен вектору поля падающей волны. В этом случае из граничного условия следует, что напряженность поля эванесцентной волны равна нулю.

В эксперименте была зарегистрирована модуляция профиля интенсивности стоячей эванесцентной волны с периодом 239.2 нм вдоль поверхности призмы [2]. Эффективность сбора фотонов эванесцентного поля диэлектрическим острием СТФМ составляла 63%, что соответствует эффективному диаметру острия 80 нм. Зафиксированная высокая константа связи между эванесцентным полем и острием оптоволокна крайне важна для спектроскопических применений СТФМ, особенно для детектирования слабого сигнала флуоресценции одиночных молекул красителя на нанометровом масштабе. Экспериментальные параметры измеренной пространственной структуры эванесцентного поля, включая длину затухания вдоль оси  $z$  ( $d = 103,9$  нм), оказались в хорошем соответствии с расчетными данными. Таким образом, прямым измерением было показано наличие эванесцентной волны, возбуждаемой лазерным излучением на верхней грани стеклянной призмы в условиях полного внутреннего отражения.

Выше был рассмотрен простейший случай, когда эванесцентное поле возникает в результате эффекта полного внутреннего отражения на плоской поверхности раздела двух сред. Для оптической ближне-полевой микроскопии характерна другая ситуация, когда эванесцентная волна формируется в результате прохождения через апертуру субволнового радиуса. Это явление используется для получения оптических изображений с разрешением, во много раз превышающим граничное значение (1.1).

#### *Распространение волны через апертуру малого диаметра*

Коэффициент пропускания излучения через круглое отверстие малого диаметра в металлическом экране был получен Г.А.Бете (1944) в предположении нулевой толщины экрана и бесконечной проводимости металла. Соответствующая формула для эффективности пропускания излучения *в дальней зоне*, нормированной на площадь апертуры, имеет вид

$$\eta_B = 4 \frac{(k d)^4}{27 \pi^2}, \quad (5.29)$$

где  $d$  – диаметр апертуры,  $k = 2\pi/\lambda$  – модуль волнового вектора излучения с длиной волны  $\lambda$ . Из формулы (5.29) видно, что пропус-

кание такой апертуры уменьшается как  $(d/\lambda)^4$  для субволнового диаметра отверстия  $d < \lambda$ . Кроме того, коэффициент пропускания будет уменьшаться экспоненциально при учете конечной толщины экрана с ростом последней. Это экспоненциальное уменьшение отражает тот факт, что свет не может распространяться в отверстии с диаметром  $d < \lambda/2$  (т. е.  $\lambda = \lambda_c = 2d$  является длиной волны отсечки), поэтому пропускание света апертурой становится *туннельным* процессом. На самом деле при учете конечной проводимости металлического экрана длина волны отсечки становится больше удвоенного диаметра.

В то же время экспериментальные зависимости коэффициента пропускания от длины волны демонстрируют наличие максимума, который не описывается формулой (5.29), и другую зависимость от отношения  $(d/\lambda)$ . Эти отклонения обусловлены возбуждением поверхностных плазмонов, что является предметом рассмотрения следующего параграфа.

### *Первая реализация оптической стетоскопии*

Впервые возможность получения субволнового разрешения в оптической области была продемонстрирована в статье 1984 года Д. Полем (D.W.Pohl) и соавторами из лаборатории IBM в Цюрихе [3]. Для иллюстрации принципа действия своей оптической системы цитируемые авторы использовали медицинский стетоскоп. Этот простой прибор позволяет локализовать положение сердца пациента с точностью порядка 10 см при использовании звука с длиной волны почти 100 м. В таком случае имеет место разрешение порядка  $\lambda/1000$  за счет использования малой апертуры (нижний конец стетоскопа) и малого расстояния от него до исследуемого объекта (сердца). Принцип стетоскопа может быть перенесен на другие типы и длины волн, что и было практически реализовано Д. Полем и соавторами. О статье Е. Синджа [4] (см. п. 2.1) они, по-видимому, не знали. В их работе были решены технические проблемы, о которых писал Е. Синдж в 1928 году. К этим проблемам относятся: создание апертуры малого радиуса (10 – 20 нм); экран вокруг апертуры должен быть выпуклым с отверстием в точке наибольшего возвышения; материал экрана должен быть непрозрачным, чтобы глубина проникновения оптического излучения была меньше диаметра апертуры.



Апертура малого радиуса (30 нм) была изготовлена на острие кварцевого кристаллического стрежня (100 мм длиной и 2 мм толщиной), полученном с помощью анизотропного травления в HF. Поверхность острия (зонда) и боковые стороны стрежня были покрыты тонким слоем хрома, непрозрачным слоем алюминия (500–1000 нм) и тонкой золотой пленкой против коррозии. Противоположный острию конец стрежня представлял собой оптически гладкую поверхность, через которую заводилось лазерное излучение для освещения апертуры. Острие приводилось в контакт с пьезоэлектрическим бендером, на который подавалось электрическое напряжение. Это напряжение вызывало давление бендера на острие, в результате чего металлическое покрытие становилось прозрачным для оптического излучения. Таким образом формировалось отверстие малой апертуры. Его размер мог регулироваться путем контроля интенсивности лазерного излучения, прошедшего через отверстие.

Тестирование оптического стетоскопа проводилось с помощью пропускания лазерного излучения на длине волны 488 нм через малую апертуру и тестовый объект, представлявший собой чередование светлых и темных полос, нанесенных на непрозрачную хромовую пленку. Тестовая пластинка, укрепленная на пьезоэлектрическом столе в плоскости  $xu$ , сканировалась по отношению к неподвижному острию с отверстием. Прошедший через тестовый объект световой сигнал регистрировался фотоумножителем и передавался на  $xu$  декодер. Запись декодера сравнивалась с электронной микрографией участка тестовой пластинки, на которой были изображены чередующиеся светлые и темные полосы толщиной 200 нм.

Использовались два режима работы оптического стетоскопа: с умеренным разрешением (относительно большая апертура отверстия на острие) и с высоким разрешением (малый размер апертуры отверстия). В первом случае полученное изображение качественно совпадало с изображением электронной микрографии. Во втором случае было сделано два последовательных сканирования одно за другим. Так же, как и в случае большой апертуры, была воспроизведена решеточная структура объекта. Кроме того, можно было различить более тонкие детали размером около 25 нм.

Предел разрешения оптического стетоскопа определяется глубиной проникновения оптической волны в металл и убыванием коэффициента пропускания апертуры как 4-й степени отношения ее диаметра к длине волны (5.28). Это значит, что, с одной стороны, толщи-

на непрозрачного экрана должна быть достаточно малой, чтобы прошедшая через апертуру интенсивность излучения было достаточно большой. С другой стороны, эта толщина должна быть больше глубины проникновения поля в экран для обеспечения его непрозрачности. Отсюда следует, что при оптимальных условиях минимальное разрешаемое расстояние должно составлять 5–10 нм, что находится в соответствии с результатами цитируемой работы Д. Поля с соавторами.

Итак, использование оптического стетоскопа позволило получить разрешаемое расстояние при формировании изображения в видимом диапазоне порядка  $\lambda/20$  вместо  $\lambda/2,3$ , характерного для оптической микроскопии дальнего поля.

К недостаткам оптического стетоскопа его создатели отнесли крайне малое рабочее расстояние и «глубину фокуса», так что анализируемые объекты должны находиться на поверхности твердотельных образцов. Мягкие ткани и жидкие образцы могут исследоваться таким способом в объеме с помощью перемещения острия с отверстием малой апертуры в исследуемое место.

#### *Принцип действия сканирующего оптического микроскопа ближнего поля*

Формирование изображения с помощью эванесцентных волн лежит в основе *микроскопии ближнего поля*, впервые предложенной в 1928 году ирландским ученым Е. Синджем (E. Synge) [4]. Любопытно, что его статья попала на рецензию к А. Эйнштейну, который дал в целом положительный отзыв, указав при этом на технические трудности воплощения идеи Synge. Цитируемый автор предложил использовать отверстие малого диаметра в непрозрачной пластине, освещаемое с одной стороны источником света и расположенное вплотную к исследуемому образцу (рис. 5.3).

Свет, прошедший через отверстие и образец, собирается микроскопом и регистрируется фотоприемником. Отверстие перемещается вдоль поверхности образца без соприкосновения. Таким образом, удастся получить изображение поверхности вне рамок дифракционного предела. Сам Синдж сформулировал следующие наиболее очевидные трудности на пути реализации его метода:

- высокая интенсивность источника освещения;
- необходимость точной установки расстояния между освещаемым отверстием и объектом,

- приготовление образца с ровной горизонтальной поверхностью;
- конструкция непрозрачного экрана с диаметром отверстия порядка  $10^{-6}$  см.

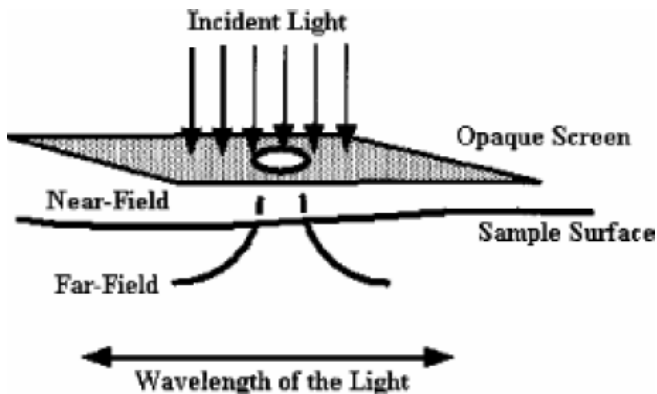


Рис. 5.3. Рисунок из оригинальной статьи Е.Н. Synge 1928 года

Впервые принципы ближнеполевой сканирующей оптической микроскопии были реализованы, как отмечалось выше, Д. Полем (D. W. Pohl) с соавторами в начале 80-х годов прошлого века [3]. В их первой статье на данную тему новый прибор субволновой микроскопии был назван оптическим стетоскопом по аналогии с медицинским стетоскопом.

После выхода в свет первой краткой статьи с описанием реализации оптического стетоскопа Д. Поль с соавторами опубликовали в 1986 году более полную работу на эту тему, в которой созданный ими прибор получил название сканирующего оптического микроскопа ближнего поля или по-английски Near Field Optical-Scanning (NFOS или SNOM) микроскоп [7]. В этой работе, в частности, дано теоретическое описание принципа ближнеполевой микроскопии. В основе предложенной интерпретации лежит пропускание излучения через субволновую апертуру, которое осуществляется путем возбуждения эванесцентных волн за непрозрачным экраном вблизи апертуры. Как уже отмечалось, эти затухающие волны не могут распространяться в свободном пространстве, но могут переносить энергию на другую сторону экрана. На рис. 5.4 изображены линии, соответствующие

одинаковой плотности энергии электрического поля вблизи отверстия малого радиуса  $a \ll \lambda$  в картине ближнего и дальнего поля.

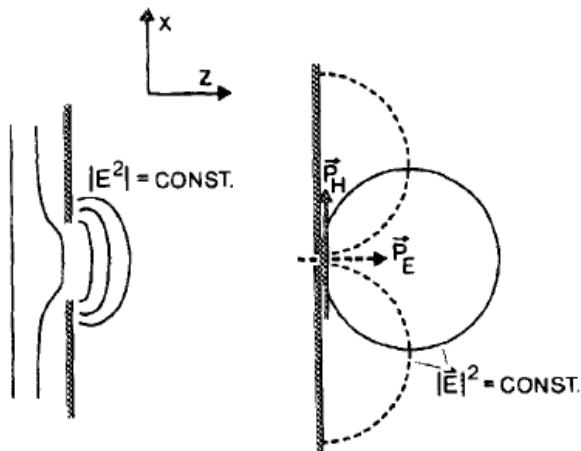


Рис. 5.4. Линии постоянной плотности энергии вблизи малой апертуры: картина ближнего поля (слева), картина дальнего поля (справа)

Если разложить в пространственный интеграл Фурье электрическое поле вблизи отверстия в непрозрачном экране, то в этом разложении будут представлены волновые векторы с величиной проекции на плоскость экрана в диапазоне от  $2\pi/\lambda$  до  $2\pi/a$ . Это означает большую неопределенность импульса эванесцентной волны  $\Delta p \approx \hbar/a$ , что согласует высокое разрешение ближнеполевой оптической микроскопии с требованием принципа неопределенности Гейзенберга. Это согласование основано также на том, что компонента волнового вектора эванесцентной волны на ось симметрии отверстия (ось  $z$  на рис. 5.4) является чисто мнимой величиной, поэтому действительная проекция волнового вектора на плоскость экрана может быть больше его модуля.

Чтобы упростить ситуацию, предположим, что экран имеет бесконечно высокую электрическую проводимость. Тогда к данной проблеме применимы результаты, полученные Г.А. Бете еще в 1944 году при рассмотрении дифракции на малом отверстии. Следуя Бете, нужно различать электромагнитное поле, возбужденное тангенциальной компонентой магнитного поля и нормальной компонентой электриче-

ского поля в падающей волне. Дальнее поле (на расстоянии много большем длины волны) может быть представлено в виде суперпозиции полей, создаваемых магнитным и электрическим диполем, как это показано на рис. 5.5 справа. Сплошная окружность на этом рисунке представляет линию равной плотности энергии для поля магнитного диполя, а штриховая – для поля электрического диполя. Видно, что в направлении, нормальном к экрану, доминирует излучение магнитного диполя с поляризацией, параллельной экрану. Напротив, в направлении, параллельном экрану, основной вклад дает поле электрического диполя, поляризованное по нормали к экрану.

Формирование изображения в оптическом микроскопе ближнего поля отвечает возбуждению эванесцентной волны магнитным диполем, параллельным плоскости непрозрачного экрана. Данное условие выполняется для падающей на экран с отверстием электромагнитной волны, электрический вектор в которой поляризован перпендикулярно плоскости падения. Результат расчета пространственной плотности энергии эванесцентной волны на оси симметрии круглой апертуры для этого случая, проведенный по формулам Бете, представлен на рис. 5.5. Абсцисса рисунка приведена в единицах радиуса отверстия  $\zeta = z/a$ . Отметим, что именно плотность энергии электрического поля в эванесцентной волне, пропорциональная  $|E|^2$ , ответственна за поглощение излучения в анализируемом образце, а значит, и за формирование изображения в ближнеполевом микроскопе. Длина волны излучения для графика рис. 5.5 положена равной 100 радиусам отверстия, т.е.  $ka \cong 0,06$ . Данные параметры приближенно описывают экспериментальную ситуацию цитируемой работы Д. Поля с соавторами, когда  $\lambda = 488$  нм,  $a = 5$  нм.

Величина  $|E|^2$ , соответствующая ординате на рис. 5.5, нормирована на квадрат напряженности магнитного поля в падающей волне  $|H_0|^2$ . Как видно из рис. 5.5, зависимость плотности энергии эванесцентной волны от расстояния до экрана может быть разделена на три интервала. В первом (ближайшем к экрану) интервале  $\zeta = 0,3 - 1$  ( $z = 2 - 5$  нм) плотность энергии поля изменяется слабо: от 0.001 до  $10^{-4}$  в относительных единицах. Поглощающий объект, помещенный в эту зону, будет сильно влиять на излучение из апертуры. Коэффи-

циент пропускания малой апертуры в этой ближайшей зоне дается выражением

$$\eta_{prox} = \frac{4(k a)^2}{\pi^2}. \quad (5.30)$$

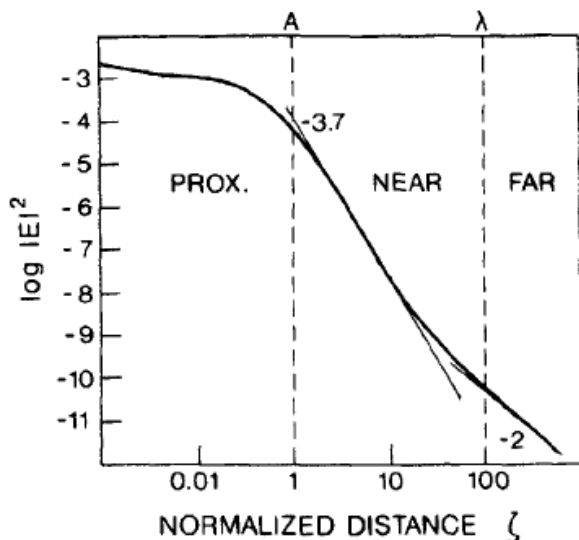


Рис. 5.5. Распределение плотности энергии эванесцентной волны на оси симметрии круглой апертуры, рассчитанное с помощью интегралов Бете для случая магнитного возбуждения. Абсцисса равна расстоянию до плоскости экрана и приведена в единицах радиуса отверстия

Для рассматриваемых значений параметров из (5.30) следует, что  $\eta_{prox} = 0,00146$ . Отметим, что равенство (5.30) дает иную более слабую зависимость коэффициента пропускания от безразмерного отношения  $a/\lambda$ , чем его дальнеполевой аналог (5.29). Действительно, для тех же параметров формула (5.29) приводит к величине  $\eta_B = 3,1 \cdot 10^{-6}$ . Ближайшая к плоскости экрана зона называется **эванесцентной**, поскольку в ней существует эванесцентная электромагнитная волна.

Следующий интервал расстояний вдоль оси от экрана  $\zeta = 1 - 100$  ( $z = a \div \lambda = 5 - 500$  нм), в котором плотность энергии поля убывает как  $\zeta^{-3,7}$ , называется *областью ближнего поля*.

В ней эванесцентная волна уже затухла. Плотность энергии поля в этой зоне очень мала  $|E|^2 = (10^{-4} \div 10^{-10}) |H_0|^2$ .

Наконец, последняя зона расстояний, представленная на рис. 5.5, простирается от  $z = \lambda$  и далее ( $\zeta > 100$ ). Это так называемая *дальняя зона излучения*, в которой уже сформировалась электромагнитная волна, способная распространяться в свободном пространстве. С этим излучением имеют дело в традиционной микроскопии дальнего поля. Его интенсивность уменьшается как обратный квадрат расстояния от точки испускания, что характерно для сферической волны.

Отношение коэффициента пропускания в дальней зоне (5.29) к коэффициенту пропускания в непосредственной близости от малой апертуры (5.30), пропорциональное  $(ka)^2$ , говорит о том, что только малая часть энергии эванесцентного поля переносится в дальнюю зону и излучается в виде свободной электромагнитной волны. Для вышеприведенных параметров отношение коэффициентов пропускания составляет всего 0.002. Оставшаяся часть энергии циркулирует между двумя краями апертуры подобно реактивному току в электрической цепи. Хотя апертура дает малый вклад в излучение в дальней зоне, она приводит к эффективной диссипации энергии поля в поглощающем объекте, расположенном в эванесцентной зоне. Этим объясняется высокий контраст, достигаемый в NFOS микроскопии, несмотря на малую толщину анализируемых объектов.

Расчет распределения поля в плоскости, параллельной экрану, говорит о том, что энергия эванесцентной волны резко уменьшается на расстояниях, больших радиуса отверстия от центра апертуры. Таким образом, разрешающая способность ближнеполевого оптического микроскопа определяется радиусом апертуры.

Относительная мощность излучения, прошедшего апертуру, в дальней зоне может быть определена с помощью формулы Бете (5.29), если ее умножить на площадь отверстия  $\pi a^2$ :

$$P_{INF} = 128 \frac{k^4 a^6}{27 \pi} . \quad (5.31)$$

Величина (5.31) имеет размерность сечения. Отсюда видно, что регистрируемая фотодетектором в дальней зоне мощность излучения, являющаяся основным измеряемым параметром, очень сильно зависит от радиуса отверстия.

Оптимальное значение радиуса зависит от мощности источника излучения и чувствительности фотодетектора. Для мощности излучения аргонового лазера 40 мВт, площади фокального пятна на экране в месте расположения апертуры  $10^{-7} \text{ см}^2$  и радиуса отверстия 5 нм получаем входную (в апертуру) мощность излучения 300 нВт. Мощность излучения в дальней зоне после прохождения отверстия согласно формуле (5.29) составит около одного пиковатта. Если предположить, что 90% этой мощности поглощается исследуемым образцом, а до детектора доходит 10% оставшейся мощности, то последний должен поглотить порядка фемтоватта излучения, что соответствует поглощению примерно  $2,5 \cdot 10^4$  фотонов в секунду. Такого потока вполне достаточно для надежной регистрации современными фотодетекторами. При уменьшении радиуса апертуры в два раза фотонный поток уменьшается в  $2^6 = 64$  раза (см. формулу (5.31)), и его детектирование становится уже нетривиальной задачей.

Итак, характерная разрешающая способность ближнеполевого оптического микроскопа составляет около 10 нм, что на полтора порядка меньше длины волны видимого излучения.

Сильная зависимость мощности излучения в дальней зоне от радиуса отверстия (5.31) благоприятно влияет на контраст объектов, расположенных в эванесцентной зоне. Так, например, если закрыть половину апертуры темным пятном, то  $P_{INF}$  уменьшится в 8 раз. Следовательно, переход от прозрачных областей объекта к непрозрачным областям будет заметным образом сказываться на показании фотодетектора (в пределах разрешающей способности NFOS микроскопа).

### *Острие и апертура малого радиуса*

Важнейшим элементом ближнеполевого сканирующего оптического микроскопа является субволновая апертура, обеспечивающая высокое разрешение и контраст этого прибора. Идеальной апертурой являлось бы прозрачное отверстие в тонком слое металла с бесконечной проводимостью. На самом деле реальные металлы относительно плохо проводят электрический ток на оптических частотах. Вследствие этого толщина металлического слоя должна в несколько раз пре-



восходить толщину скин-слоя ( $l_s = c / \sqrt{2\pi\omega\sigma}$ ,  $\sigma$  – электропроводность), чтобы воспрепятствовать прохождению светового пучка через экран вне отверстия. Это обстоятельство накладывает ограничение снизу на радиус апертуры, который не должен быть существенно меньше толщины экрана. В противном случае, как об этом уже говорилось, апертура будет влиять на излучение как волновод за пределами полосы пропускания. В результате коэффициент пропускания апертуры будет очень малым. (В этих рассуждениях не учитывается возможное влияние поверхностных плазмонов, см. Гл.6).

Итак, диаметр апертуры ближнеполевого микроскопа не должен быть меньше удвоенного скин-слоя, величина которого для хороших металлов на оптических частотах составляет примерно 6–10 нм.

Максимального сближения исследуемого объекта и апертуры, необходимого для работы в эванесцентной зоне (зоне затухающих волн), можно добиться, если только апертура находится на вершине точечного острия (апертурный зонд). Радиус кривизны острия, изготовленного из кристалла кварца в пионерских работах Д. Поля с соавторами (рис. 5.6), равнялся 10 нм, что подтверждалось изображением, полученным с помощью электронного микроскопа.

Процесс формирования прозрачного отверстия в металлическом покрытии кварцевого острия, использовавшийся Д. Полем, показан на рис. 5.6 (внизу). Для того чтобы отверстие было сделано над самым кончиком острия, использовалось сплющивание и утончение металла под действием прозрачной части исследуемого образца. При этом на кончик острия через его базовую часть подавалось лазерное излучение. Процесс холодной деформации металлического покрытия над кончиком острия продолжался до тех пор, пока излучение из верхней части острия не становилось видимым глазу. Достоинством описанного метода является его простота и возможность контроля процесса. Недостатком апертур, полученных с помощью холодной деформации, является ограниченное время их работы, вызванное постепенным увеличением радиуса под действием внутренних напряжений.

Острие для ближнеполевого микроскопа обычно изготавливается из заостренного прозрачного оптоволокна, покрытого алюминием для получения полностью непрозрачной пленки на боковой поверхности конуса, на вершине которого формируется апертура. Существуют два метода приготовления заостренных оптических волокон с острой вершухой и приемлемым углом раствора конуса: (1) «нагревание и вы-

тягивание», (2) химическое травление. При использовании первого метода получается гладкая поверхность острия, но трудно получить достаточно большой угол раствора конуса острия, в результате чего коэффициент пропускания апертуры снижается. Химическое травление позволяет производить острия в массовом количестве, причем угол раствора конуса острия можно контролировать в процессе изготовления. Таким способом удается получать зонды с большим коэффициентом пропускания излучения. К недостаткам этого метода относится микроскопическая шероховатость поверхности острия, что приводит к отверстиям в металлическом покрытии, которые являются источниками паразитных сигналов.

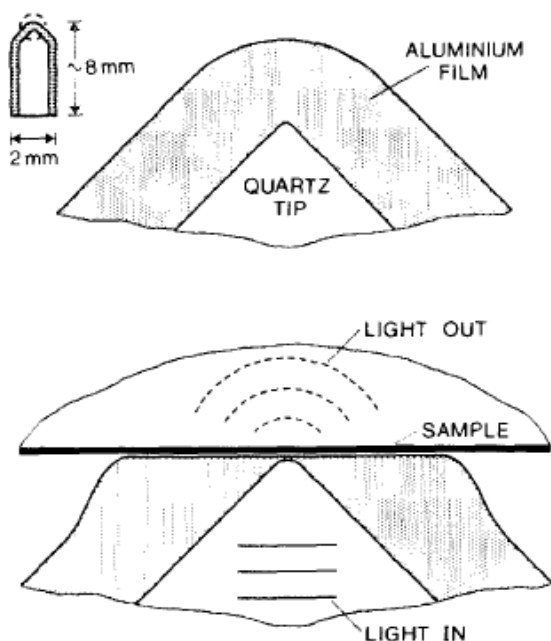


Рис. 5.6. Точечное острие до (вверху) и в процессе (внизу) формирования апертуры малого радиуса

Контроль дистанции между острием и образцом в нанометровом масштабе имеет решающее значение для работы NFOS микроскопа, поскольку область взаимодействия зонд–образец должна быть ограничена эванесцентной зоной (рис. 5.6), т.е. расстоянием не более 5 нм от поверхности образца. В работах Д. Поля использовался контроль этого расстояния по туннельному току между металлическим покрытием острия и образцом (рис. 5.7). Для этого, естественно, необходимо, чтобы образец имел ненулевую электропроводность. Этот метод получил свое развитие и апробацию в сканирующей туннельной микроскопии (СТМ), изобретенной в 1982 году Г. Бинингом с соавторами также в лаборатории IBM в Цюрихе (за 2 года до изобретения NFOS). СТМ базируется на измерении электронного тока, возникающего между острием и поверхностью образца при малых расстояниях между ними (около 1 нм), в результате эффекта туннелирования. Контроль этого расстояния может осуществляться с точностью порядка одной десятой ангстрема. Если проводить аналогию, то можно сказать, что в оптической микроскопии ближнего поля роль туннельного электрического тока играют эванесцентные электромагнитные волны, так же как и туннельный ток, существующие только в непосредственной близости от острия.

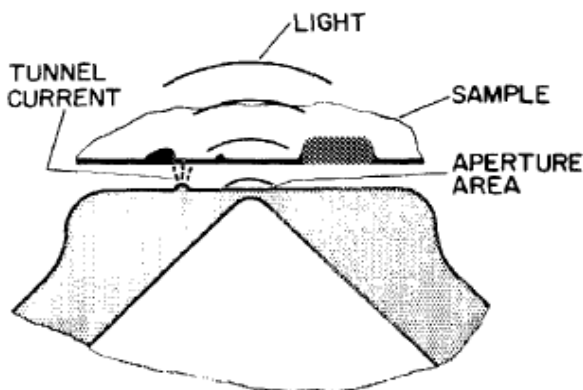


Рис. 5.7. Туннельная схема контроля расстояния между острием NFOS микроскопа и исследуемым образцом

Микроскопические выступы на поверхности выровненного металлического слоя на вершукше острия могут действовать как источники туннельного тока (рис. 5.7). Туннельный ток возникает, когда расстояние между микроострием и образцом становится меньшим 2 нм при приложении напряжения 0,05–1 В. Ток стабилизируется на заданном значении (около 1 нА) с помощью кольца обратной связи, включающего  $z$  пьезопозиционер, который регулирует расстояние между острием и образцом. В результате исследуемый образец удерживается в эванесцентной зоне апертуры, и таким образом достигается высокая разрешающая способность и контраст изображения NFOS микроскопа.

### *Модификации оптического микроскопа ближнего поля*

Рассмотренная выше реализация оптической микроскопии ближнего поля основывается на освещении объекта в эванесцентной зоне при помощи наноразмерной апертуры и формировании его изображения в дальнем поле. Недостатком данной схемы является то обстоятельство, что только малая часть излучения (примерно  $10^{-4}$ ) из оптоволокна излучается апертурой из-за отсечки волноводной моды. Поэтому наряду с *апертурной схемой* NFOS микроскопа был предложен ряд других вариантов, лишенных данного недостатка. Один из них называется *безапертурной конфигурацией*, которая изображена на рис. 5.8.



Рис. 5.8. Безапертурная конфигурация сканирующего оптического микроскопа ближнего поля [8]

В безапертурной конфигурации сильно сжатое в пространстве оптическое поле создается на конце заостренного зонда с помощью внешнего освещения в дальней зоне. В этом случае полезный сигнал, порожденный взаимодействием эванесцентной (затухающей) волны с образцом, должен быть извлечен из общего электромагнитного поля, включающего рассеянную волну от источника освещения. Таким образом, данная схема предполагает более сложную процедуру построения изображения. В то же время безапертурная модификация позволяет получить большее разрешение, чем ее апертурный аналог, порядка 1–20 нм. Безапертурная микроскопия ближнего поля является микроскопией в отраженном свете, что имеет большую практическую ценность, чем первоначальный вариант, в котором использовалось излучение, прошедшее через образец.

Освещаемое острие (зонд) в безапертурной схеме играет роль оптической антенны. Идея оптической антенны, возбуждаемой внешним излучением, была предложена Д. Полем и У. Фишером в 1989 году для наблюдения поверхностных плазмонов в выступах на гладкой металлической поверхности. Поверхностные плазмоны возбуждались эванесцентной волной в результате освещения призмы в условиях полного внутреннего отражения (схема Кречманна, рис. 5.9).

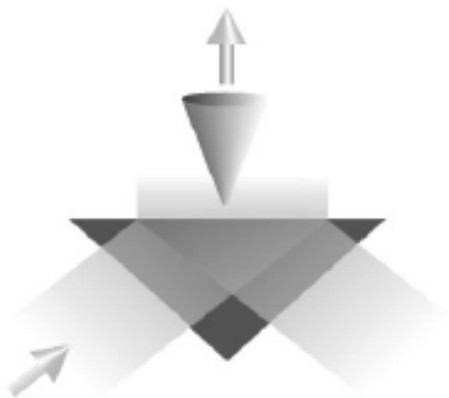


Рис. 5.9. Схема сканирующего туннельного оптического микроскопа [8]

Схема, изображенная на рис. 5.9, применяется в сканирующем туннельном оптическом (или фотонном) микроскопе. Принцип действия этого прибора показан на рис. 5.10.

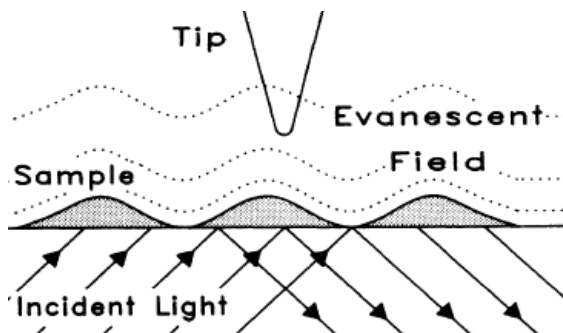


Рис. 5.10. Принцип действия сканирующего туннельного оптического микроскопа

Как видно из рис. 5.10, оптический туннельный микроскоп является фотонным аналогом электронного туннельного микроскопа.

В данном случае роль туннельного электронного тока играет эванесцентное электромагнитное поле, экспоненциально затухающее при удалении от поверхности призмы (см. подробнее Гл.6). Эванесцентное поле возбуждается в условиях полного внутреннего отражения распространяющейся электромагнитной волны от верхней горизонтальной поверхности призмы (рис. 5.10). Этот процесс был подробно описан в начале данного параграфа (см. формулы (5.25) – (5.26)). Исследуемый образец в схеме, изображенной на рис. 5.10, располагается на поверхности призмы в области действия эванесцентного поля. Топография образца пространственно модулирует эванесцентную волну, и изменение ее интенсивности регистрируется острием зонда, сканирующим поверхность образца.

В зонде происходит конверсия эванесцентного поля в распространяющуюся моду оптоволокна, которая посылается в детектор. Изображение объекта формируется после соответствующей обработки полученных данных. В отличие от вышеописанной апертурной схемы в данном случае имеет место освещение объекта в дальней зоне и детектирование в эванесцентной зоне.

Детектирование в фотонном туннельном микроскопе осуществляется с помощью диэлектрического острия без металлического покрытия. Это имеет свои преимущества и свои недостатки. К преимуществам относится тот факт, что диэлектрическое острие намного слабее возмущает распределение эванесцентного поля, чем любой вид зонда с металлическим покрытием. С другой стороны, размер пространственной области взаимодействия эванесцентного поля с диэлектрическим острием не столь ограничен, как в случае металлического зонда. Это, естественно, ухудшает разрешающую способность оптического туннельного микроскопа, характерное значение которой составляет 100 нм для слабо рассеивающих поле образцов. Следует отметить, что в случае сильно рассеивающих объектов волоконные острия без металлического покрытия могут производить серьезные артефакты при формировании изображения. Вместо диэлектрических острий без металлического покрытия оптическая туннельная микроскопия может использовать и апертурные зонды. Хотя в такой конфигурации эффективность сбора информации ниже, зато это помогает устранить рассеянные поля, проникающие в оптоволоконный зонд через боковую поверхность.

Уникальной чертой оптического туннельного микроскопа является его способность измерять не только усредненную во времени интенсивность ближнего поля, но также его амплитуду и фазу. Эти измерения могут иметь даже временное разрешение при использовании гетеродинной интерферометрии. Данный вопрос лежит, однако, вне рамок настоящего учебного пособия.

Еще одно направление оптической микроскопии ближнего поля связано с использованием *флуоресценции* в качестве детектируемого сигнала. Так, в работе Л. Новотного с соавторами в 1999 году было использовано двухфотонное возбуждение флуоресценции молекул под действием электрического поля, усиленного вблизи металлического [8]. Малый диаметр острого конца золотого зонда (15 нм), применявшегося в данном исследовании, позволял локально возбуждать объект. Электрическое поле вблизи острия, состоящее в основном из эванесцентных волн, создавалось с помощью лазерного облучения нанозонда. Это локальное поле взаимодействовало с поверхностью исследуемого образца, вызывая спектроскопический отклик, который детектировался в дальней зоне на различных длинах волн, отличных от длины волны возбуждения. Авторы статьи отмечали, что такой же способ может быть применен для других типов линейного и нелиней-

ного формирования изображения, например, для изображения, полученного на основе усиленного рамановского рассеяния.

В статье Т. Янга с соавторами из Калифорнийского технологического института сообщалось о создании нового безапертурного флуоресцентного микроскопа ближнего поля, в котором получалось изображение флуоресцирующих образцов после однофотонного возбуждения [9]. В основе действия этого прибора лежит безызлучательная передача энергии флуоресцирующих молекул на близлежащие металлические или полупроводниковые поверхности. Использование однофотонного возбуждения облегчает выбор лазерного источника и уменьшает пиковую мощность излучения, проходящую через объектив и падающую на образец. Так же как и в простом безапертурном методе разрешающая способность флуоресцентного микроскопа ближнего поля определяется радиусом кривизны зонда (острия). Для нужд атомной силовой микроскопии имеются коммерчески доступные острия с радиусом кривизны 5 нм. Отсюда следует, что максимальная разрешающая способность рассматриваемого типа микроскопов лежит в интервале 1–5 нм. Поскольку в данном случае сигнал детектируется на частоте, отличной от частоты возбуждающего излучения, то это существенно облегчает интерпретацию изображения. В работе [9] была использована модуляционная методика регистрации сигнала, обобщенная на случай одиночных фотонов. Обобщение состояло в том, что регистрировалось время прибытия каждого фотона и учитывались только те фотоны, время прибытия которых попадало в заданный интервал. Так, например, регистрировались только фотоны, поглощенные фотодетектором незадолго до и после того, как острие достигало ближайшей к образцу точки. Данный метод имеет более высокую чувствительность по сравнению с традиционными методиками. Кроме того, он позволяет применять различную технику для анализа данных в зависимости от свойств регистрируемого сигнала.

Таким образом, использование современных методов ближнеполевой сканирующей микроскопии в оптическом диапазоне частот позволяет получать изображения предметов, которые имеют размер, существенно меньший длины световой волны (на один-два порядка). Иными словами, удается преодолеть дифракционный предел, ограничивающий разрешение традиционных микроскопов, в которых изображение формируется в дальней зоне на расстоянии, много большем длины волны излучения. В основе физики формирования изображе-



ния в ближней зоне лежит использование в данном процессе эванесцентных волн, затухающих на больших расстояниях. Эванесцентные волны, имеющие мнимый волновой вектор, обеспечивают выполнение принципа неопределенностей Гейзенберга «размер предмета – разброс волновых векторов», являющегося квантовым аналогом дифракционного условия на разрешающую способность оптического прибора. Эванесцентные волны играют важную роль также в сканирующем оптическом туннельном микроскопе, где они являются аналогом туннельного тока, который используется в обычном сканирующем туннельном микроскопе.

## ГЛАВА 6. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ПЛАЗМОНЫ

### 6.1. Поверхностные плазменные колебания

Из изложенного выше следует важная роль структуры электромагнитного поля на границе раздела сред с различными диэлектрическими проницаемостями. На поверхности раздела этих сред возникает новый тип плазменных колебаний – так называемые *поверхностные плазмоны* (ПП), которые могут возбуждаться полем электромагнитной волны, падающей на поверхность раздела [10].

#### Колебания на плоской границе

Предположим, что металлическая поверхность является бесконечной плоскостью  $z = 0$ . Сам металл заполняет полупространство  $z > 0$  (рис. 6.1).

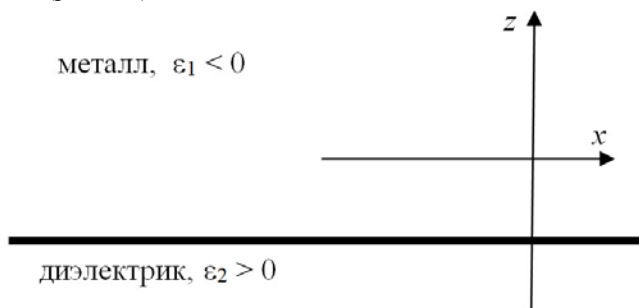


Рис. 6.1. Плоская граница раздела металл-диэлектрик

Исследуем поверхностные плазменные колебания, распространяющиеся вдоль поверхности металла (например, в направлении  $x$ ). Вглубь металла и вдали от его поверхности вне металла они быстро затухают. Электростатический скалярный потенциал, удовлетворяющий уравнению Лапласа, выберем в форме

$$\begin{aligned}\phi(x, z > 0, t) &= C \exp(ikx - kz - i\omega t); \\ \phi(x, z < 0, t) &= C \exp(ikx + kz - i\omega t).\end{aligned}\tag{6.1}$$

В действительности, скалярный потенциал не является статическим и должен удовлетворять не уравнению Лапласа, а волновому уравнению

$$\Delta\phi - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0.\tag{6.2}$$

Пренебrecь временной производной в этом уравнении можно при условии  $k \ll \omega / c$ , которое мы будем предполагать далее. Это условие и означает, что затухание поверхностного колебания вглубь металла или вдаль от его поверхности наружу происходит на расстояниях, малых по сравнению с длиной  $c/\omega$ . Итак, удовлетворяется уравнение Максвелла

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \vec{D} &= \varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = -\varepsilon \Delta\phi = 0, \\ \varepsilon &= 1 - (\omega_p / \omega)^2 \neq 0.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Уравнение Максвелла  $\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  оценочно записывается в виде  $kH \ll \omega \varepsilon E / c$ . Отсюда следует, что в рассматриваемом случае магнитное поле мало по сравнению с электрическим полем,  $H \ll E$ .

Следующее уравнение Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\Delta\phi = 0 = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}\tag{6.4}$$

удовлетворяется приближенно за счет малости магнитного поля, указанной выше. Отличное от нуля магнитное поле приводит к малой добавке к электрическому полю, определяемому по скалярному по-

тенциалу соотношением  $\vec{E} = -\nabla\phi$ , и мы этой малой добавкой далее пренебрегаем.

Приведенный выше скалярный электростатический потенциал непрерывен на границе металла. Автоматически будет непрерывна и тангенциальная компонента напряженности электрического поля  $E_x$ .

Вычислим теперь нормальную компоненту индукции электрического поля:

$$\begin{aligned} D_z(x, z > 0, t) &= \varepsilon k C \exp(ikx - kz - i\omega t); \\ D_z(x, z < 0, t) &= -k C \exp(ikx + kz - i\omega t). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Она должна быть непрерывна на границе металла  $z = 0$ , т.е.  $\varepsilon = -1$ . Таким образом, частота поверхностных плазменных колебаний на плоской металлической поверхности равна

$$\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{2}}. \quad (6.6)$$

Мы видим, что она меньше частоты объемных плазменных колебаний.

### Колебания Ми

В отличие от объемных плазменных колебаний, частота поверхностных плазменных колебаний зависит от формы поверхности. В предыдущем разделе это была плоская поверхность металла. В данном разделе мы рассмотрим собственные поверхностные колебания электронного газа в металлическом шарике малого радиуса  $a$  (снова по сравнению с величиной  $c/\omega$ ). Эта задача была впервые решена Г. Ми в 1908 году. При таких колебаниях электронное облако как целое смещается то в одну, то в другую сторону относительно положительного заряда (без изменения концентрации, в отличие от объемных плазменных колебаний).

В указанных условиях волновое уравнение для скалярного потенциала снова сводится к уравнению Лапласа, как и в предыдущем разделе. Его решение внутри шарика ищем в простом виде:

$$\phi(z, t) = -Ez \exp(-i\omega t); \quad r < a. \quad (6.7)$$

Этот вид соответствует однородному электрическому полю внутри шарика, направленному вдоль некоторой оси, которую мы и выбираем за ось  $Z$ . Итак,

$$\vec{E}(r < a, t) = E \vec{n}_z \exp(-i\omega t). \quad (6.8)$$

Как и в предыдущем разделе, из уравнения Максвелла

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.9)$$

следует, что магнитное поле мало по сравнению с электрическим, а именно,  $H \ll (a\omega/c)E \ll E$ . Далее мы пренебрегаем магнитным полем аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе.

Снаружи шарика потенциал представляет собой потенциал дипольного момента  $p = a^3 E$ : величина  $a^3$  есть поляризуемость металлического шарика, которая следует из поляризуемости диэлектрического шарика, если устремить диэлектрическую проницаемость к бесконечности (см. конец раздела 2.2). Этот потенциал равен

$$\phi(z, r, t) = -\frac{pz}{r^3} \exp(-i\omega t) = -\frac{Ea^3}{r^2} \cos \theta \exp(-i\omega t), \quad r > a. \quad (6.10)$$

Здесь  $\theta$  — угол между направлением плазменных колебаний и направлением в точку наблюдения. Видно, что потенциал непрерывен на границе шарика  $r = a$ . Вместе с ним является непрерывной и тангенциальная компонента напряженности электрического поля.

Теперь мы обратимся к условию непрерывности нормальной составляющей индукции электрического поля на границе шарика. Получаем

$$D_r = \varepsilon E \cos \theta \exp(-i\omega t) = -2E \cos \theta \exp(-i\omega t). \quad (6.11)$$

Отсюда находим  $\varepsilon = -2$ . Так как  $\varepsilon = 1 - (\omega_p / \omega)^2$ , то окончательно частота поверхностных плазменных колебаний электронного газа маленького металлического шарика (*частота Ми*) равна

$$\omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{3}}. \quad (6.12)$$

Она резонансно возбуждается при поглощении маленьким металлическим шариком электромагнитного излучения с частотой, близкой к частоте Ми.

## 6.2. Определение и закон дисперсии поверхностных плазмонов

Поверхностные плазмоны (ПП) представляют собой связанные колебания электромагнитного поля и электронов проводимости, распространяющиеся вдоль поверхности проводника. Их можно интерпретировать как электромагнитные волны, захваченные поверхностью металла вследствие взаимодействия со свободными электронами. В ходе этого взаимодействия электроны проводимости коллективно реагируют на электромагнитное воздействие, осциллируя в резонансе со световой волной. Гибридный характер поверхностного плазмона отражается в другом его наименовании – плазмон-поляритон: здесь «плазмон» относится к колебаниям заряда на поверхности металла, а «поляритон» – к электромагнитному полю в диэлектрике.

На рис. 6.2 представлено электромагнитное поле и ассоциированный с ним электрический заряд поверхностного плазмона для случая плоской поверхности металла, граничащего с диэлектриком. Приповерхностный положительный заряд металла связан с дефицитом электронов проводимости в данной области, отрицательный – с их избытком.

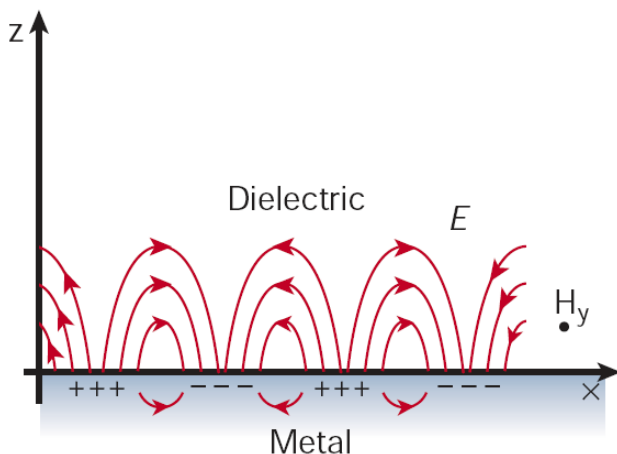


Рис. 6.2. Электромагнитное поле поверхностного плазмона

Как видно из рисунка, магнитное поле поверхностного плазмона направлено параллельно границе раздела сред и перпендикулярно плоскости рисунка. Напряженность электрического поля имеет нормальную к поверхности составляющую, что необходимо для формирования поверхностного электрического заряда. В местах «выхода» силовых линий напряженности электрического поля в металле локализуется положительный заряд, а в местах их «входа» в металл – отрицательный. Силовые линии электрического поля загибаются так, чтобы удовлетворить граничным условиям. В результате электрическое поле затухает экспоненциально с удалением от поверхности проводника, так что энергия поверхностного плазмона сконцентрирована вблизи границы раздела металл/диэлектрик. При этом электрическое поле проникает в металл на глубину скин-слоя:  $\delta_m \approx c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$  ( $\sigma$  – проводимость металла,  $\omega$  – круговая частота излучения), а в диэлектрик на глубину порядка длины волны излучения:  $\delta_d \approx c/\omega$ .

Таким образом, электромагнитное поле поверхностного плазмона велико вблизи поверхности (существенно больше поля возбуждающей ПП световой волны), а при удалении от нее в направлении нормали к поверхности является эванесцентным. Данное свойство находит широкое применение в нанооптике, поскольку позволяет концентрировать и каналировать излучение с помощью субволновых структур.

Из рис. 6.2 также следует, что поверхностный плазмон по своим свойствам занимает промежуточное положение между плоской электромагнитной волной и объемными плазменными колебаниями. Действительно, как и в плоской волне в ПП присутствуют оба поля: электрическое и магнитное в отличие от объемного плазмона, с которым связано только электрическое поле (магнитного поля нет). В отличие от плоской волны силовые линии электрического поля ПП загнуты, поскольку порождают электрический заряд на поверхности. Так же как в обычном плазмоне электрическое поле ПП связано с электрическим зарядом, в то время как в плоской волне электрическое поле обусловлено изменением во времени магнитного поля. ПП является продольно-поперечной волной. Как видно из рис. 6.2, его электрическое поле помимо поперечной  $z$  составляющей напряженности имеет еще  $x$ -составляющую, ориентированную вдоль волнового вектора в направлении распространения плазмона. Эта «промежуточность» свойств ПП неудивительна, ведь ПП присутствует сразу в двух сре-

дах: диэлектрике и проводнике, тогда как плоская волна распространяется в диэлектрике (частный случай – вакуум), а объемный плазмон – в проводнике. Можно сказать, что ПП – квазичастица-амфибия, которая «живет» в двух средах.

### *Закон дисперсии для поверхностных плазмонов*

Найдем закон дисперсии поверхностных плазмонов на плоской границе металл-диэлектрик (рис.6.1). Диэлектрическая проницаемость металла задается формулой (6.3), а диэлектрика считается постоянной  $\varepsilon_2 > 0$ .

Уравнение Максвелла для напряженности электрического поля записывается в общем виде для обеих сред как

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (6.13)$$

Соответственно для металла уравнение для касательной составляющей напряженности электрического поля  $E_{1x}$  записывается в виде

$$\frac{\partial^2 E_{1x}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{1x}}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_1}{c^2} \frac{\partial^2 E_{1x}}{\partial t^2} = 0. \quad (6.14)$$

Решение этого уравнения при  $z > 0$  ищем в виде поверхностной бегущей вдоль оси  $X$  волны, затухающей при  $z \rightarrow \infty$ :

$$E_{1x} = E \exp(ik_x x - k_{1z} z - i\omega t). \quad (6.15)$$

Здесь величина  $k_{1z} > 0$  пока еще не определена. Подставляя (6.15) в (6.14), находим дисперсионное соотношение

$$k_x^2 - k_{1z}^2 = \varepsilon_1 \omega^2 / c^2. \quad (6.16)$$

Аналогично находим касательную составляющую напряженности электрического поля  $E_{2x}$  в области диэлектрика, т.е. при  $z < 0$ :

$$E_{2x} = E \exp(ik_x x + k_{2z} z - i\omega t) \quad (6.17)$$

Здесь величина  $k_{2z} > 0$  также пока еще не определена. Это решение затухает при  $z \rightarrow -\infty$ . Видно, что на границе металла и диэлектрика ( $z = 0$ ) касательные составляющие напряженности (6.15) и (6.17) совпадают друг с другом, как и должно быть в соответствии с

граничными условиями. Аналогично (6.16), находим из (6.17), что дисперсионное соотношение имеет вид

$$k_x^2 - k_{2z}^2 = \varepsilon_2 \omega^2 / c^2. \quad (6.18)$$

В указанной геометрии на рис.6.1 имеем  $E_y = 0$ .

Индукция электрического поля  $\mathbf{D}$  удовлетворяет уравнению Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \quad (6.19)$$

Это позволяет выразить нормальную проекцию напряженности электрического поля через касательную. В случае металла имеем из уравнения Максвелла (6.19) и выражения (6.15)

$$\frac{\partial E_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{1z}}{\partial z} = 0, \quad (6.20)$$

что дает

$$E_{1z} = i \frac{k_x}{k_{1z}} E_{1x}. \quad (6.21)$$

Аналогично для диэлектрика находим из уравнения Максвелла (6.19) и выражения (6.17):

$$E_{2z} = -i \frac{k_x}{k_{2z}} E_{2x}. \quad (6.22)$$

На границе раздела сред должно быть непрерывна нормальная составляющая индукции  $D_z$  электрического поля. Из (6.21) и (6.22) тогда находим, учитывая непрерывность касательной составляющей

$$\varepsilon_1 E_{1z} = \varepsilon_2 E_{2z}; \quad \frac{\varepsilon_1}{k_{1z}} = -\frac{\varepsilon_2}{k_{2z}}. \quad (6.23)$$

Отметим, что так как  $\varepsilon_1 < 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ , то неравенства  $k_{1z} > 0$ ,  $k_{2z} > 0$  согласуются с (6.23).

Из (6.16) и (6.18) находим:

$$\frac{k_{1z}^2}{k_{2z}^2} = \frac{k_x^2 - \varepsilon_1 \omega^2 / c^2}{k_x^2 - \varepsilon_2 \omega^2 / c^2}. \quad (6.24)$$

А из (6.23) имеем



$$\frac{k_{1z}^2}{k_{2z}^2} = \frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2}. \quad (6.25)$$

Приравнявая выражения (6.24) и (6.25) друг другу, получим

$$\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_2^2} = \frac{k_x^2 - \varepsilon_1 \omega^2 / c^2}{k_x^2 - \varepsilon_2 \omega^2 / c^2}. \quad (6.26)$$

Отсюда находим дисперсионное соотношение для плазменной волны в направлении оси  $X$ :

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{|\varepsilon_1| \varepsilon_2}{|\varepsilon_1| - \varepsilon_2}}. \quad (6.27)$$

Из (6.27) следует, что поверхностный плазмон распространяется только для достаточно хорошего металла, когда выполняется условие  $|\varepsilon_1| - \varepsilon_2 > 0$ . В предельном случае, когда  $|\varepsilon_1| \gg \varepsilon_2$ , из (6.27) получим

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_2}, \quad (6.28)$$

т.е. поверхностный плазмон не зависит от диэлектрической проницаемости металла, а определяется только диэлектриком.

Если диэлектрические проницаемости металла и диэлектрика содержат малые мнимые слагаемые, то из (6.27) получим соответствующую мнимую добавку в правой части, определяющую слабое затухание поверхностного плазмона. Для весьма хорошего металла в соответствии с (6.28) затухание плазмона определяется только малой мнимой частью диэлектрической проницаемости диэлектрика.

При большой частоте поля  $\omega$  величина  $\varepsilon_1 > 0$ . В этом случае величины  $k_{1z}$  и  $k_{2z}$  становятся мнимыми. Поверхностный плазмон, разумеется, исчезает, а мы имеем дело просто с преломлением электромагнитной волны. То же, конечно, имеет место для случая двух диэлектриков. Если, например, волна падает из диэлектрической области 1 в диэлектрическую область 2, то в области 1 нужно добавить еще и отраженную волну (к выражению (6.15)). Тогда электромагнитные поля определяются хорошо известными формулами Френеля.

Если для диэлектрической проницаемости металла использовать простую «плазменную» формулу  $\varepsilon_m(\omega) = 1 - \omega_p^2 / \omega^2$  (модель Друде), полагая, что  $\omega < \omega_p$ , тогда (6.27) можно переписать в виде

$$k_x = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_d |\varepsilon_m|}{|\varepsilon_m| - \varepsilon_d}}. \quad (6.29)$$

Отсюда видно, что ПП будет распространяться вдоль оси  $x$  без затухания для достаточно хорошего металла, когда  $|\varepsilon_m| > \varepsilon_d$ .

В противном случае проекция волнового вектора  $k_x$  будет чисто мнимой величиной, и распространение ПП по поверхности металла окажется невозможным.

В рамках той же модели для диэлектрической проницаемости металла после элементарных алгебраических преобразований получается следующий закон дисперсии для ПП:

$$\omega_{SP}(k_x) \cong \frac{\omega_p}{\sqrt{\varepsilon_d \omega_p^2 + (\varepsilon_d + 1) c^2 k_x^2}} c k_x, \quad (6.30)$$

где  $\omega_p$  – плазменная частота электронов проводимости металла. При выводе выражения (6.30) было учтено, что в видимой области спектра  $\omega < \omega_p$ . Для золота, например,  $\omega_p = 1,36 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$  и  $\omega = 3 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$  на длине волны  $\lambda = 620 \text{ нм}$ . Эксперимент дает следующие величины для комплексной диэлектрической проницаемости золота на этой длине волны:  $\varepsilon'_m = -10,66$  (действительная часть),  $\varepsilon''_m = 1,37$  (мнимая часть), так что предположение  $|\varepsilon'_m(\omega)| \gg \varepsilon''_m(\omega)$ , сделанное при выводе формулы (6.30), выполняется. Для серебра на длине волны 633 нм (излучение гелий-неонового лазера)  $\varepsilon'_m = -18,1$  и  $\varepsilon''_m = 0,5$ .

Закон дисперсии поверхностных плазмонов (6.29) для металла Друде представлен на рис. 6.3 ( $\hbar \omega_p = 6 \text{ эВ}$  и  $\varepsilon_d = 2,25$ ). На этом же рисунке изображена дисперсионная зависимость для света в диэлектрической среде, высокочастотная дисперсионная ветвь (мода Брюстера), удовлетворяющая уравнению (6.29), описывающая глубокое проникновение поля в металл и закон дисперсии для света в вакууме.

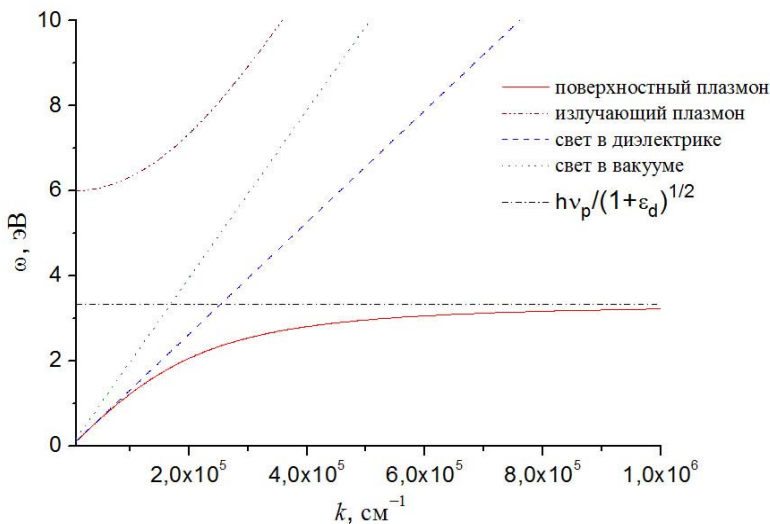


Рис. 6.3. Нижняя сплошная кривая – закон дисперсии для поверхностного плазмона ( $\hbar \omega_p = 6$  эВ,  $\epsilon_d = 2,25$ ), штрихпунктир – дисперсионная зависимость для света в диэлектрике

Видно, что при малых значениях волнового вектора закон дисперсии ПП близок к закону дисперсии света – носит линейный характер. С ростом волнового вектора дисперсионная зависимость ПП загибается вниз от прямой линии, и в пределе  $k_x \ll \omega_p/c$  частота поверхностного плазмона становится равной  $\omega = \omega_p / \sqrt{1 + \epsilon_d}$ . Такой ход дисперсионной кривой имеет простое физическое истолкование. При малых  $k_x$  продольная составляющая электрического поля плазмона мала, как это следует из 4-го уравнения Максвелла (закон Кулона), поле носит преимущественно поперечный характер и закон дисперсии близок к линейному, характерному для света. Напротив, при больших проекциях  $k_x$  вклад продольной составляющей электрического поля велик, и ПП приближается по своим свойствам к объемному плазмону. При этом, однако, частота колебаний оказывается

меньше плазменной в  $\sqrt{1 + \varepsilon_d}$  раз, т.е. для раздела металл/вакуум  $\omega = \omega_p / \sqrt{2}$  в пределе больших  $k_x$ . Следует отметить, что в этом пределе резко возрастают потери энергии ПП, обусловленные разогревом электронов проводимости. В результате существует ограничение сверху на величину волнового вектора поверхностного плазмона, реально достижимую в эксперименте:  $k_x < 3\omega/c$ . В модели металла Друде, когда учитывается вклад в диэлектрическую проницаемость только электронов проводимости, последнее неравенство дает следующее ограничение на частоту поверхностного плазмона:  $\omega < \omega_p \sqrt{(3 - \varepsilon_d)/(2\varepsilon_d + 3)}$ .

Верхняя дисперсионная кривая, изображенная на рис. 36 сплошной линией, описывает распространяющуюся в металле электромагнитную волну, которая существует для частот, больших плазменной частоты  $\omega > \omega_p$ . Напомним, что данное явление называется ультрафиолетовой прозрачностью металлов.

В частотном диапазоне  $\omega_p > \omega > \omega_p / \sqrt{1 + \varepsilon_d}$  электромагнитные колебания отсутствуют. Это запрещенная или стоп-зона для электромагнитного поля на границе раздела металл/диэлектрик, аналогичная запрещенной зоне для поляритона в объеме вещества (см. выше Гл.2).

### 6.3. Генерация поверхностных плазмонов

Для генерации ПП светом необходимо выполнение закона сохранения энергии и импульса. Роль энергии играет частота, а импульса – волновой вектор в соответствии с равенствами:

$$E = \hbar \omega, \quad \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}.$$

В то же время из рис. 6.3 следует, что одной и той же частоте излучения соответствуют различные величины модуля волнового вектора ПП и света. Вследствие взаимодействия с электронами проводимости металла волновой вектор поверхностного плазмона по модулю больше, чем волновой вектор света. Поскольку пространственное распределение поля в электромагнитной волне определяется волновым вектором, то вышесказанное означает наличие фазового рассогласования полей ПП и света (фазовый синхронизм отсутствует). Иными словами, не выполняется закон сохранения энергии-импульса.

Это затрудняет обмен энергии между светом и ПП, так что приходится принимать специальные меры по установлению фазового синхронизма при возбуждении ПП светом. Отметим, что необходимым условием возбуждения ПП является  $p$ -поляризация возбуждающего света, когда вектор напряженности электрического поля лежит в плоскости падения. Только в этом случае световая волна будет раскачивать колебания электронов проводимости. Для выполнения условия фазового синхронизма поверхность раздела металл/диэлектрик можно сделать рифленой, это приведет к увеличению волнового вектора фотона и соответственно к появлению «сцепления» между светом и ПП.

Условием распространения поверхностных плазмонов является соотношение между волновыми векторами падающего излучения, плазмонов и векторов обратной решетки твердого тела:

$$\vec{k}_{sp} = \vec{k}_x \pm i\vec{G}_x \pm jG_y \quad (6.31)$$

где  $\vec{k}_{sp}$  – волновой вектор плазмона,  $k_x$  – компонента волнового вектора падающего излучения в плоскости образца,  $\vec{G}_{x,y}$  – волновые векторы обратной решетки,  $i, j$  – целые числа.

Для генерации поверхностных плазмонов обычно используются металлические пленки, напыленные на диэлектрические подложки. Дисперсионное уравнение, определяющее условие распространения поверхностных плазмонов в такой среде при нормальном падении простым образом связано с длиной волны излучения  $\lambda$  и диэлектрическими проницаемостями подложки  $\varepsilon_1$  и металла  $\varepsilon_2$  ( $|G_{x,y}| = 2\pi / a_0$ ):

$$(i^2 + j^2)^{1/2} \lambda = a_0 \left( \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right)^{1/2}. \quad (6.32)$$

На рис.6.4 [11] показано сравнение приведенных дисперсионных соотношений с наблюдаемым распределением интенсивности света, распространяющегося через нанотверстие (другие названия: нанопора, нанофильер). Видно превосходное согласие наблюдаемого распределения интенсивности с приведенными дисперсионными соотношениями.

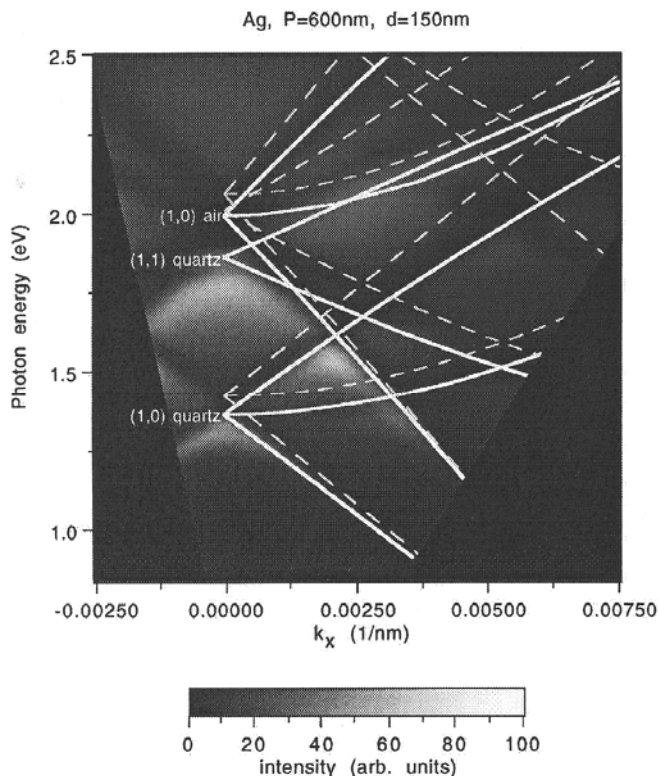


Рис.6.4. Наблюдаемое распределение интенсивности света, проходящего через поликристаллические серебряные нанопильеры диаметром 150 нм и толщиной 200 нм. Линии – решения дисперсионных уравнений

Другой способ «сцепить» свет и ПП базируется на явлении полного внутреннего отражения света от внутренней поверхности призмы, внешняя поверхность которой располагается параллельно поверхности металла. Существуют две модификации этого способа: метод Отто, использующий воздушный зазор между призмой и металлом, и метод Кречманна, когда тонкая металлическая пленка (10 – 50 нм толщиной), в которой возбуждается ПП, прикрепляется непосредственно к поверхности призмы.

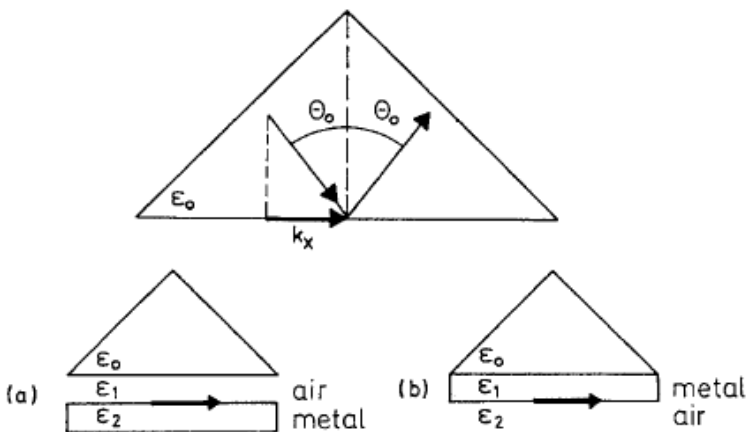


Рис. 6.5. Метод Отто (а) и метод Крейчмана (б) возбуждения поверхностных плазмонов [10]

В обоих случаях световая дисперсионная прямая (см. рис. 6.5) проходит под меньшим углом к оси абсцисс, поскольку ПП возбуждается световой волной, распространяющейся в призме, а дисперсионная кривая ПП соответствует случаю  $\varepsilon_d = 1$ . В результате возникает пересечение дисперсионных зависимостей света и ПП при некотором значении волнового вектора. Понятно, что для возникновения пересечения необходимо выполнение условия  $\varepsilon_p > \varepsilon_d$  ( $\varepsilon_p$  – диэлектрическая проницаемость призмы).

В точке пересечения дисперсионных зависимостей выполняется условие фазового синхронизма и возможна генерация ПП.

Волновой вектор ПП, соответствующий синхронизму, определяется углом падения света  $\theta_i$ :  $k^* = (\omega/c) \sin \theta_i$ , где  $k^*$  – решение уравнения  $\omega_{sp}(k_x, \varepsilon_d = 1) = c k_x / \sqrt{\varepsilon_p}$ , которое для закона дисперсии ПП (6.30) имеет вид:  $k^* = \sqrt{(\varepsilon_p - 1)/2} \omega_p / c$ .

Вблизи угла  $\theta_i$  наблюдается минимум интенсивности отраженного излучения, поскольку световая энергия поглощается поверхно-

стным плазмонам (рис.6.6). Глубина этого минимума, определяющая эффективность преобразования света в ПП, в методе Кречмана связана с толщиной металлической пленки.

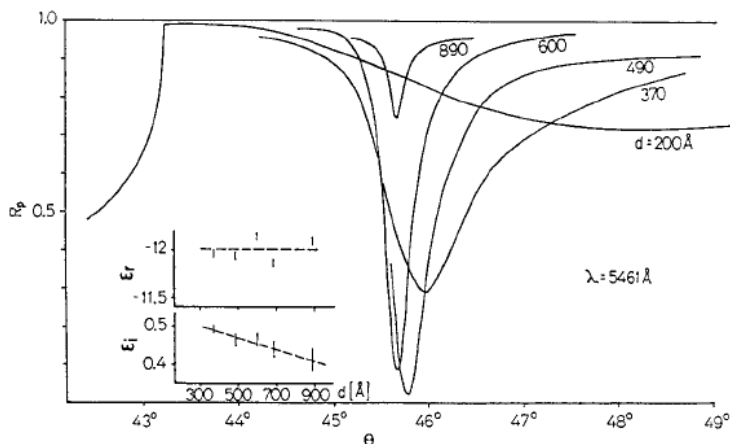


Рис.6.6. Коэффициент отражения света с длиной волны 500 нм от серебряной пленки толщиной 55 нм в зависимости от угла падения излучения

Для серебряной пленки и длины волны света 500 нм минимум коэффициента отражения достигается при толщине 55 нм. Минимум коэффициента отражения отвечает усилению электромагнитного поля на границе раздела металл/диэлектрик, ассоциированному с возникновением ПП.

Для неровной серебряной пленки на длине волны 600 нм можно получить приповерхностное усиление электрического поля в 200 раз, что используется в нелинейной оптической спектроскопии. Коэффициент усиления электрического в ПП можно получить, рассматривая трехслойную структуру кварц/металлическая пленка/воздух (рис. 6.7.)



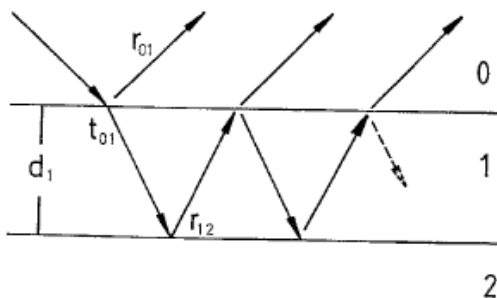


Рис.6.7. Трехслойная структура кварц/металлическая пленка/воздух с толщиной металлической пленки  $d_1$  коэффициентом пропускания  $t_{01}$  и коэффициентами отражения на границах разделов  $r_{01}$  и  $r_{12}$

Амплитудный коэффициент пропускания для р-волны ( $\alpha = k_{z1}d_1$  – набег фазы волны при прохождении металла) равен:

$$t_{012}^p = \frac{t_{01}^p t_{12}^p e^{i\alpha}}{1 + r_{01}^p r_{12}^p e^{2i\alpha}} \quad (6.33)$$

Максимальное значение коэффициента пропускания дается соотношением

$$T_{\max} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{a}{1 + |\varepsilon_1'|} \frac{2(\varepsilon_1'')^2}{\varepsilon_1''}, \quad (6.34)$$

где  $\varepsilon_0, \varepsilon_1', \varepsilon_1''$  – соответственно диэлектрическая проницаемость диэлектрика, действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости металла,

$$a^2 = \left[ -\varepsilon_1' (\varepsilon_0 - 1) - \varepsilon_0 \right]$$

Для серебра  $\varepsilon_1 = -18,2 + 0,5 \cdot i$  ( $\lambda = 633$  нм), тогда  $T_{\max} = 139$ .

Для неровной серебряной пленки на длине волны 600 нм можно получить приповерхностное усиление электрического поля в 200 раз, что используется в нелинейной оптической спектроскопии.

В спектроскопии поверхностно-усиленного рамановского рассеяния (ПУРР), содержащей напряженность поля в высокой степени, сигнал за счет поля ПП может быть усилен от  $10^{12}$  до  $10^{15}$  раз, что экспериментально наблюдалось для молекул красителя, адсорбированных поверхностью агрегированных золотых и серебряных коллоидных пленок. Аналогичный эффект усиления ПУРР был обнаружен для наноструктурированных золотых и серебряных пленок. Поверхность этих пленок состояла из нанооболочек, представлявших собой кварцевую сердцевину радиуса 94 нм, окруженную золотой или серебряной оболочкой толщиной около 9 нм. Было зафиксировано плазмонное усиление рамановского сигнала от молекулы красителя с коэффициентом  $2,5 \cdot 10^{10}$ .

Закон дисперсии (6.29) характерен для ПП на плоской поверхности. В случае поверхностных плазмонов, возникающих, например, на поверхности металлического шара, помещенного в переменное электрическое поле, имеем:  $\omega_{SP} = \omega_p / \sqrt{3}$  – частота Ми (см. выше формулу (6.12)). Она описывает приповерхностные колебания электронов проводимости шара в случае, если его диаметр достаточно мал:  $d < c/\omega$  (квазистационарный случай), где  $\omega$  – частота внешнего электрического поля, т.е. поле можно считать однородным. При таких колебаниях электронное облако как целое смещается то в одну, то в другую сторону относительно положительного заряда (без изменения концентрации, в отличие от объемных плазменных колебаний). Колебания электронной плотности маленького металлического шара резонансно возбуждаются при помещении его в переменное поле с частотой  $\omega \approx \omega_p / \sqrt{3}$ .

Квазидвумерный характер поля ПП делает эти квазичастицы перспективными для создания на их основе высокоинтегрированных планарных фотонных устройств с масштабом в нанометровом диапазоне длин, что по технологическим причинам невозможно сделать с помощью традиционной трехмерной оптики. Для нанооптических приложений также важно, что пространственный размер поля ПП в большей степени определяется размером поверхностной металлической структуры, нежели длиной волны возбуждающего ПП света.

Существенное ограничение на использование ПП накладывает тот факт, что они затухают не только в направлении нормали к поверхности, но также и в направлении своего распространения. Это

затухание связано с наличием мнимой части у диэлектрической проницаемости металла, что приводит к диссипации энергии электромагнитной волны (омические потери). Длина распространения плазмона равна

$$l_{SP} = \frac{c}{\omega} \left( \frac{\varepsilon'_m + \varepsilon_d}{\varepsilon'_m \varepsilon_d} \right)^{3/2} \frac{(\varepsilon'_m)^2}{\varepsilon''_m}, \quad (6.35)$$

где  $\varepsilon'_m$ ,  $\varepsilon''_m$  – действительная и мнимая части диэлектрической проницаемости металла. Для проводников с минимальными омическими потерями, таких как серебро или золото, длина распространения ПП в видимой части спектра составляет сотни микрон, достигая миллиметров в ИК диапазоне. Этого вполне достаточно для создания высокоинтегрированных фотонных устройств нано- и микрометрового масштаба длин.

Отметим, что сказанное относится к идеально гладкой плоской поверхности. В случае неровной границы раздела проводник/диэлектрик ПП будут затухать также вследствие нежелательных радиационных потерь, поскольку тогда может быть выполнено условие фазового синхронизма, необходимое для перекачки энергии ПП в световую волну.

## 6.4. Применение поверхностных плазмонов. Транспорт излучения через наноструктуры

*Текстурированная металлическая поверхность – фотонный кристалл для ПП*

Создание периодической структуры диэлектрической проницаемости в изоляторах и полупроводниках с пространственным масштабом порядка длины волны приводит к появлению особенностей в распространении света в таких структурах, получивших название фотонных кристаллов. В частности, при определенных условиях в фотонном кристалле возникают т.н. фотонные запрещенные зоны или стоп-зоны (по аналогии с электронными запрещенными зонами в твердых телах). Если частота фотона попадает в стоп-зону, то его распространение в такой среде оказывается невозможным. В зависимости от размерности периодической структуры диэлектрической проницаемо-

сти фотонный кристалл может быть одномерным, двумерным или трехмерным. Одномерные фотонные кристаллы давно известны – это многослойные диэлектрические зеркала, такие как отражатель Брэгга.

Текстурированная с периодом порядка длины волны поверхность металла может служить примером фотонного кристалла для поверхностного плазмона. Например, если период этой структуры равен половине длины волны ПП, то вместо распространяющейся волны ПП превращается в стоячую волну, что соответствует возникновению фотонной запрещенной зоны для поверхностного плазмона. На рис. 6.8 приведен пример фотонной запрещенной зоны, возникающей в дисперсионной зависимости ПП.

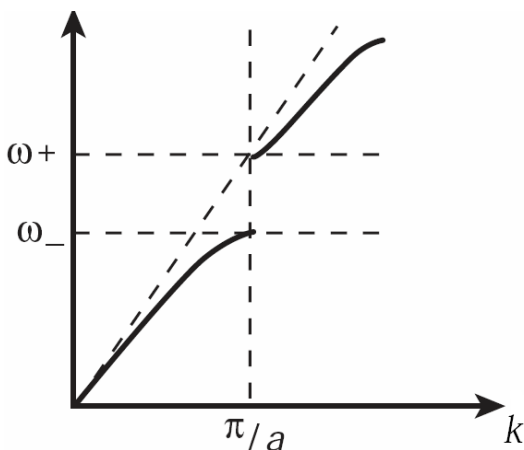


Рис. 6.8. Запрещенная зона в дисперсионной зависимости ПП

Видно, что в частотном интервале  $\omega_- < \omega < \omega_+$  поверхностных плазмонов не существует: плотность их мод равна нулю.

Групповая скорость ПП, характеризующая скорость переноса энергии, на краях запрещенной зоны обращается в ноль:  $u = \partial\omega/\partial k = 0$ , что выражается горизонтальностью асимптот к верхней и нижней дисперсионной ветви на рис. 6.8. С другой стороны, спектральная плотность фотонных мод, пропорциональная производной  $\partial k/\partial\omega$ , вблизи краев запрещенной зоны велика, что соответст-

вует большому усилению электрического поля на заданных частотах вблизи поверхности металла. Горизонтальная дисперсионная зависимость характерна для локализованных ПП металлических наночастиц, как это имеет место в случае резонанса Ми (см. выше). Частота и спектральная ширина локализованных мод ПП определяется размером, материалом и формой наночастиц, а также их окружением. Плазмоны на поверхности металлических наночастиц могут быть использованы с целью маркировки биомолекул, а также в других приложениях.

### *Поверхностные плазмоны в нанооптике*

Излучение ближнего поля (см. Главу 5), создаваемое с помощью нанообъектов, способно локально возбуждать ПП. В этом случае также как в методике Отто или Кречманна эванесцентная электромагнитная волна содержит волновые вектора, параллельные поверхности металла, необходимые для «сцепления» фотона с поверхностным зарядом проводника.

Локальное возбуждение ПП на металлической пленке можно реализовать с помощью:

- *апертурного зонда*;
- *облучаемой наночастицы*;
- *флуоресцирующих молекул* (связь между ПП и флуорофосфорами может существенно улучшить флуоресцентный анализ в медицинской диагностике, биотехнологии и генной инженерии)

В этих случаях ПП возбуждаются компонентой эванесцентного поля, обладающей той же проекцией волнового вектора  $k_x$ , что и ПП на заданной частоте. Напряженность электрического поля в возбуждающем излучении должна лежать *в плоскости падения*.

Размер источника ближнего поля и его *близость* к металлической поверхности определяют пространственный спектр, который может быть использован для возбуждения ПП. Если источник находится слишком далеко от поверхности, то только спектральные компоненты, отвечающие плоской волне, достигают металлической поверхности и связь с ПП отсутствует.

Построение оптических элементов для нанооптики ПП, базирующихся на интерференции ПП, возникающих от различных центров рассеяния. Особый интерес представляет развитие плазмонных волноводных структур, позволяющих осуществлять транспорт и манипуляцию светом в субволновом масштабе, что перспективно для создания субволновых оптических интегрированных приборов.

*Применение поверхностных плазмонов*

- для высокочувствительных сенсоров,
- для повышения чувствительности флуоресцентного анализа,
- для создания планарных интегрированных субволновых оптоэлектронных структур,
- с целью поверхностного усиления нелинейных электромагнитных процессов,
- в оптической ближнеполевой микроскопии

*Транспорт излучения через наноструктуры.*

В серии недавних экспериментальных и теоретических работ обнаружены радикальные изменения в прохождении света через нанотелескопы в металлах, указывающие на резкие увеличения (по сравнению с обычной оптикой) коэффициентов прохождения светового сигнала, включая его усиление. Более того, наноструктурирование материала вблизи нанощелей и использование массива нанотелескопов приводят к изменению спектрального состава и направления распространения проходящего излучения. Тем самым наноструктурированные метаматериалы принципиально меняют сложившиеся представления о транспорте излучения через вещество. Изменение структуры нанорельефа (их диаметра, формы, глубины, типа металла и подложки, пространственной структуры массива наноструктур, угла падения света и др.) открывает возможности управления интенсивностью, направлением и спектральным составом проходящего через них излучения.

Изложенные свойства транспорта световых импульсов через наноструктуры открывают широкие возможности их применения для скоростных фотодетекторов и телекоммуникационных систем. Осо-

бый интерес представляют возможности использования нанопор для детектирования и расшифровки молекулярных соединений. Эти возможности основаны на резком (более чем на три порядка величины) уменьшении наблюдаемого объема по сравнению с обычными объемами оптического детектирования, ограниченными размерами пятна световой (обычно, лазерной) фокусировки (порядка  $1 \text{ мкм}^3$ ). Такое уменьшение объема наблюдений объясняется концентрацией световой энергии вблизи апертуры нанопильера, причем интенсивность излучения здесь может значительно превосходить интенсивность падающего на фильеру светового сигнала. Общая схема экспериментов по регистрации молекулярных соединений в нанобъемах представлена на рис.6.9.

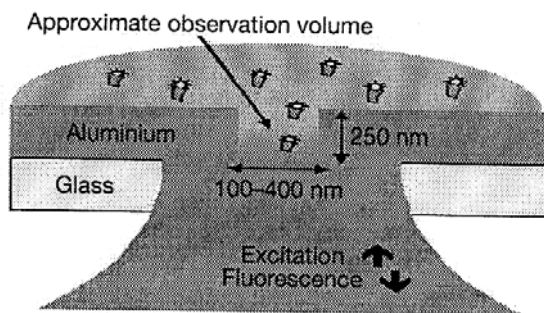


Рис.6.9. Общая схема экспериментов по регистрации молекулярных соединений в нанобъемах

Нанооптика, или оптика внутри волновой зоны излучения, основана, как указывалось, на физических механизмах возбуждения поверхностных плазмонов в металлах при их облучении световыми импульсами видимого диапазона. Плазмон, возбуждаемый на поверхности вблизи нанопоры (рис.6.10) или нанооптика (рис.6.11) представляет собой осциллирующий диполь, создающий вокруг себя электромагнитное поле.

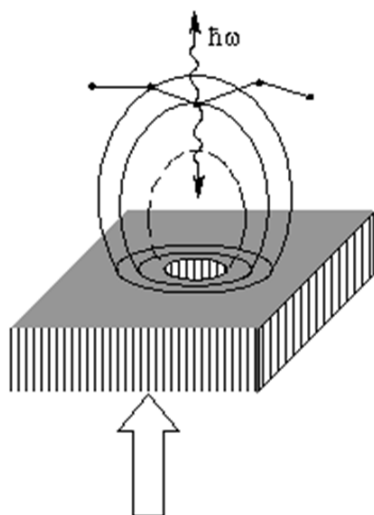


Рис.6.10. Возбуждение нанообъекта (биомолекулы) внутри волновой зоны поверхностного плазмона, возбужденного падающей световой волной вблизи нанопильеры (нанопоры)

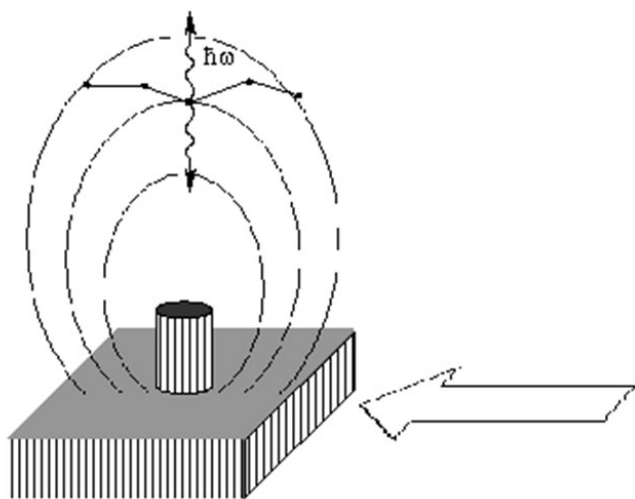


Рис. 6.11. Возбуждение нанообъекта (биомолекулы) внутри волновой зоны поверхностного плазмона, возбужденного падающей световой волной вблизи нанопика структурированной поверхности



На больших расстояниях  $R$  (в волновой зоне  $R \gg \lambda$ ) это поле переходит, как известно, в поле электромагнитной волны, отвечающей дипольному (или более высокой мультипольности) излучению. Однако, при попадании какого-либо нанообъекта (например, биомолекулы) внутрь волновой зоны плазмонного осциллятора имеется вполне определенная возможность возбудить этот нанообъект (молекулу) внутри волновой зоны. Последующее испускание кванта такой возбужденной молекулой позволяет зарегистрировать это событие (см. подробнее главу 5).

Поле осциллирующего электронейтрального диполя внутри волновой зоны совпадает с полем, создаваемым электрическим диполем. При наличии дипольно разрешенного перехода в молекуле (нанообъекте) с частотой, близкой к частоте колебаний плазменного диполя, возможна безызлучательная передача возбуждения от осциллирующего плазмона к нанообъекту. Описанный процесс аналогичен безызлучательной передаче возбуждения между резонансными атомами при их столкновении (рис. 6.12). Здесь передача возбуждения также обусловлена диполь-дипольным взаимодействием резонансных атомов (фактически осцилляторов).

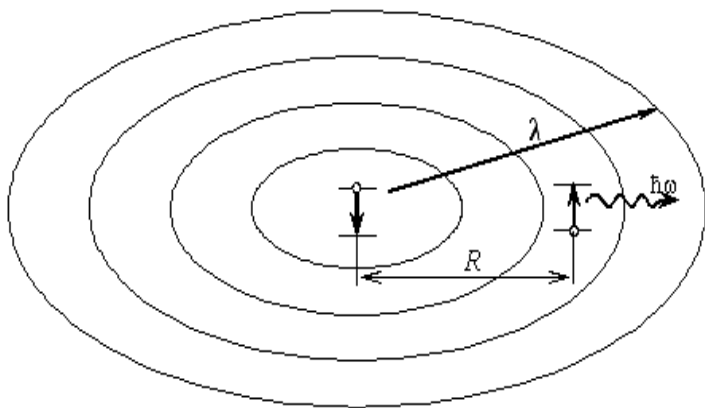


Рис.6.12. Резонансная передача возбуждения между тождественными атомами внутри волновой зоны излучения

Описанные свойства нанооптики открывают возможности расшифровки (декодирования) сложных молекулярных соединений, включая структуру биомолекул.

#### *Молекулярные нанодетекторы.*

Недавние эксперименты в Иллинойском университете (США) показали возможности разработки молекулярных детекторов на основе транспорта сложных молекул через нанотверстия (нанопоры) в диэлектрических мембранах. Транспорт биомолекул через отверстия (нанопоры) в мембранах осуществляется в электролите с помощью наложения электрического поля. Прохождение различных нуклеотидов, входящих в состав биомолекул, изменяет проводимость вблизи нанопоры, которая может быть зарегистрирована с помощью измерений микротоков, протекающих между нанoeлектродами, подведенными к нанопоре. Результаты моделирования прохождения молекулы ДНК через нанопору представлена на рис. 6.13.

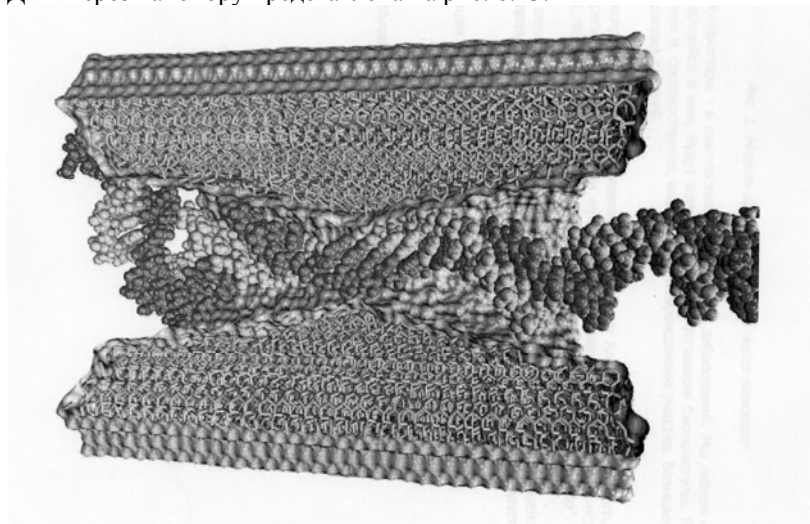


Рис.6.13. Прохождение участка молекулы ДНК через нанопору в диэлектрике SiC (результаты моделирования методами молекулярной динамики – ММД)

Характерный масштаб сил, действующих на молекулу составляет величины порядка десятков пиконьютонов, а величина регистрируемых токов – порядка пикоампер.

Предлагаемый метод позволяет по оценкам авторов резко сократить время прочтения (дешифровки) индивидуальных геномов с величин порядка полугода до одних суток при одновременном уменьшении стоимости метода от 70 млн. евро до 1000 евро. Реализация этой программы приведет к революционным изменениям в биомедицине, связанном с расшифровкой биологических кодов и диагностиком генов и другого типа заболеваний.

## ГЛАВА 7. МЕТАМАТЕРИАЛЫ

### 7.1. Отрицательное преломление

Метаматериалами, или, точнее, электромагнитными метаматериалами, называются вещества, обнаруживающие необычные электромагнитные свойства. Греческая приставка *μετα* означает выход за границу чего-либо. Таким образом, метаматериал – это вещество или искусственная структура, электромагнитные свойства которой выходят за рамки обычных представлений. Сам термин метаматериалы был предложен руководителем Центра электромагнитных материалов и устройств в Остине (штат Техас, США) Роджером Уолсером в 2000 году.

Примером метаматериала является изотропная среда с отрицательным показателем преломления. Такое вещество иногда называют *средой Веселаго* по фамилии отечественного физика В.Г. Веселаго, исследовавшего электромагнитные свойства данной среды [12]. Рассмотрим простейший случай преломления света на плоской границе раздела двух сред. Пусть угол падения электромагнитной волны равен  $\phi$ , а угол преломления равен  $\psi$  (рис. 7.1). Связь между этими углами дается известным законом Снеллиуса:

$$\frac{\sin \psi}{\sin \phi} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (7.1)$$

где  $n_{1,2}$  – коэффициенты преломления сред. В случае обычных прозрачных материалов их показатели преломления являются положительными величинами  $n_{1,2} > 0$ . Тогда преломленный луч (4) отклоняется по другую сторону от нормали к границе раздела по сравнению с

падающим лучом (1), как это видно из рис. 7.1. Если же показатель преломления первой среды положителен, а второй среды отрицателен, то преломленный луч отклоняется в ту же сторону от нормали, что и падающий луч. Это соответствует изменению знака угла преломления, вытекающему из равенства (7.1), если показатели преломления сред имеют разные знаки.

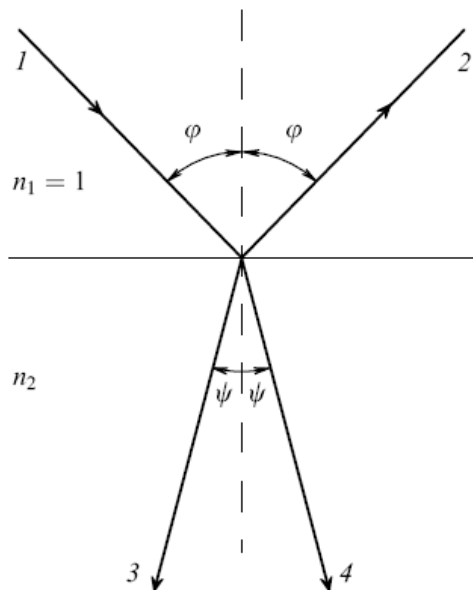


Рис. 7.1. Преломление и отражение света на границе раздела двух сред: лучи 1–4 – обычное преломление, лучи 1–3 – отрицательное преломление, лучи 1–2 – отражение

Преломление электромагнитной волны, изображенное на рис. 7.1 лучами 1–3, называется *отрицательным преломлением* или аномальной рефракцией.

Исторически впервые эффект отрицательного преломления электромагнитного излучения был рассмотрен советским физиком Л.И. Мандельштамом в 40-х годах XX века в одной из лекций, где был представлен ход преломленного луча в среде с  $n < 0$ .

Отрицательное преломление используется в простом оптическом устройстве, предложенном отечественным физиком В.Г. Веселаго и получившем название «линза Веселаго». Схематическое изображение линзы Веселаго представлено на рис. 7.2. Это устройство является плоскопараллельной пластиной, приготовленной из материала с отрицательным преломлением.

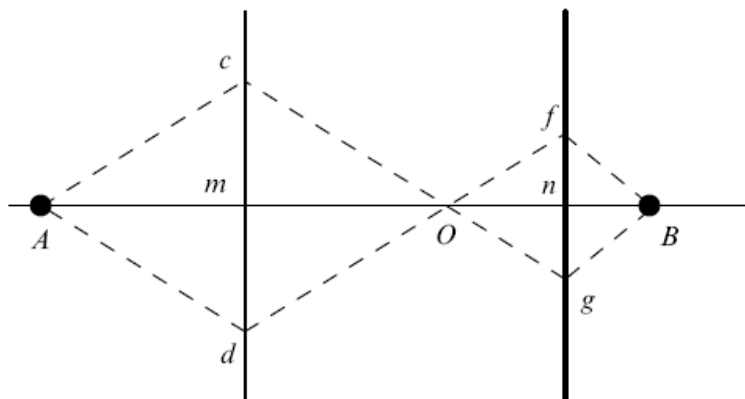


Рис. 7.2. «Линза Веселаго»

Если слева от пластины расположить источник света  $A$  на расстоянии, меньшем толщины пластины  $Am < mn$ , то лучи от этого источника сойдутся справа от пластины в точке  $B$ . В этом легко убедиться с помощью простого геометрического построения и с учетом того, что при пересечении границ раздела  $cd$  и  $fg$  преломленные лучи отклоняются к оси  $AB$ . Указанное построение выполнено на рис. 7.2 для случая, когда плоскопараллельная пластина с показателем преломления  $n_2 = -1$  помещена в вакуум  $n_1 = 1$ , причем выполняется неравенство  $Am < mn$ . Видно, что в этом случае геометрическая длина, пройденная лучом света от источника  $A$  в точку  $B$  по любому пути, вне пластины равна длине пути, пройденному светом в пластине:

$$Am + mB = mn, \quad Ac + gB = cg, \quad Ad + fB = df. \quad (7.2)$$

Поскольку в рассматриваемом случае  $n_2 = -n_1$ , то из равенств (7.2) следует, что *оптическая* длина пути, пройденная светом из точ-

ки  $A$  в точку  $B$ , равна нулю. Напомним, что оптическая длина пути равна интегралу  $L = \int n dl$ , где  $n$  – показатель преломления вещества,  $dl$  – дифференциал геометрической длины пути. Поскольку оптическая длина пути в рассматриваемом случае равна нулю для любой траектории распространения света, отвечающей закону Снеллиуса (7.1), то автоматически выполняется принцип Ферма, который формулируется в виде  $\delta L = 0$  и гласит, что свет распространяется по траекториям, на которых оптическая длина пути имеет экстремум.

Таким образом, с помощью «линзы Веселаго» можно получать изображение предметов, расположенных на расстоянии, меньшем толщины линзы, но нельзя получить изображение источника на большем расстоянии. В частности, «линза Веселаго» не фокусирует в точку плоскопараллельный пучок света и поэтому не является линзой в строгом смысле этого слова. Тем не менее данное оптическое устройство позволяет получить идеальное изображение предмета в том смысле, что точечный предмет оно переводит в точечное изображение. Это характеристическое свойство «линзы Веселаго» связано с тем, что в основе формирования изображения лежит отрицательное преломление электромагнитного излучения, а не его дифракция.

## 7.2. Электромагнитные процессы в «левой» среде

Отрицательный показатель преломления возникает в случае, когда диэлектрическая ( $\epsilon$ ) и магнитная ( $\mu$ ) проницаемости вещества *одновременно имеют отрицательные значения*:  $\epsilon < 0$ ,  $\mu < 0$ . Коэффициент преломления среды дается формулой

$$n = \sqrt{\epsilon \mu} . \quad (7.3)$$

Это соотношение получается из закона дисперсии поперечных волн в веществе (аналогично выводу формулы (4.45)), если в уравнениях Максвелла (4.30), (4.32) учесть магнитные свойства среды и напряженность макроскопического магнитного поля  $\mathbf{H}$  заменить на индукцию магнитного поля  $\mathbf{B}$   $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ .

Ясно, что в случае отрицательности обоих сомножителей в подкоренном выражении в правой части равенства (7.3), коэффициент преломления остается действительной величиной, что отвечает про-

зрачной среде. Однако не очевидно, что тогда он имеет отрицательное значение  $n < 0$ . Чтобы выяснить данный вопрос и установить другие характеристические особенности сред с отрицательным преломлением, обратимся к уравнениям Максвелла, связывающим напряженности и индукции макроскопического электромагнитного поля с учетом магнитных свойств среды. В дифференциальной форме для прозрачного вещества эти уравнения имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (7.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \quad (7.5)$$

В случае плоской монохроматической волны, когда пространственно-временная зависимость электромагнитного поля описывается мнимой экспонентой  $\exp(i \mathbf{k} \mathbf{r} - i \omega t)$ , дифференциальные уравнения (7.4) – (7.5) преобразуются в алгебраические:

$$[\mathbf{k} \mathbf{E}] = \frac{\omega}{c} \mathbf{B}, \quad (7.6)$$

$$[\mathbf{k} \mathbf{H}] = -\frac{\omega}{c} \mathbf{D}. \quad (7.7)$$

В равенствах (7.6) – (7.7) составляющие электромагнитного поля являются функциями частоты и волнового вектора, квадратные скобки означают векторное произведение. Индукции и напряженности электрического и магнитного полей в случае изотропной среды, который мы будем предполагать в дальнейшем, связаны материальными соотношениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (7.8)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (7.9)$$

где  $\varepsilon$  и  $\mu$  – диэлектрическая и магнитная проницаемость среды.

Отметим, что в отличие от немагнитного приближения, рассмотренного в 4 главе, в настоящем разделе предполагается, что  $\mu \neq 1$ .

Подставляя формулы (7.8) – (7.9) в (7.6) – (7.7), находим

$$[\mathbf{k} \mathbf{E}] = \frac{\omega}{c} \mu \mathbf{H}, \quad (7.10)$$

$$[\mathbf{k} \mathbf{H}] = -\frac{\omega}{c} \varepsilon \mathbf{E}. \quad (7.11)$$

Из полученных уравнений (7.10) и (7.11) следует, что в случае обычной прозрачной среды, когда  $\varepsilon > 0$  и  $\mu > 0$ , векторы  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  образуют *правую тройку*. Это означает, что поворот от первого вектора ко второму, если смотреть со стороны третьего вектора, осуществляется *против* часовой стрелки. Такая среда называется *правой*. В случае одновременной отрицательности проницаемостей ( $\varepsilon < 0, \mu < 0$ ) векторы  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  образуют *левую тройку*, соответствующая среда называется *левой*. По терминологии, предложенной В.Г. Веселаго в его классической статье в УФН 1967 года [12], правая среда обладает положительной «правизной» ( $p = 1$ ), а левая среда обладает отрицательной «правизной» ( $p = -1$ ). Правизна среды равняется определителю матрицы, составленной из направляющих косинусов векторов  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (в заданном порядке).

Взаимные ориентации векторов напряженностей электрического и магнитного полей и волнового вектора плоской монохроматической волны для случая правой и левой среды показаны на рис. 7.3.

Волновой вектор плоской электромагнитной волны определяет пространственное изменение ее фазы. Направление распространения энергии электромагнитного поля определяется вектором Пойтинга, который равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}]. \quad (7.12)$$



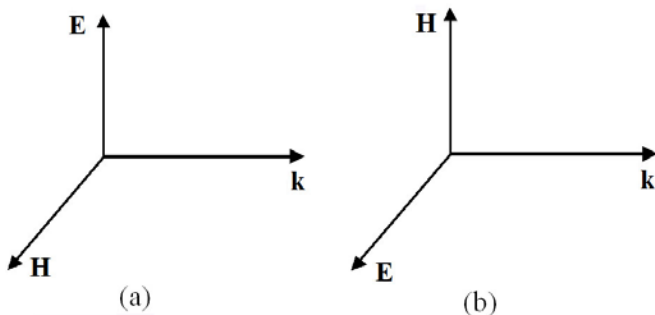


Рис. 7.3. Взаимная ориентация векторов напряженностей электрического и магнитного полей и волнового вектора плоской электромагнитной волны в правой среде (а) и в левой среде (б)

Из этой формулы следует, что векторы  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  образуют *правую тройку* независимо от знаков диэлектрической и магнитной восприимчивости вещества. Отсюда вытекает, что в правой среде направление векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{S}$  совпадает, а в левой среде эти векторы антипараллельны. Поскольку волновой вектор коллинеарен фазовой скорости излучения, а вектор Пойтинга коллинеарен групповой скорости, то в левой среде эти скорости оказываются антипараллельными. Таким образом, в левой среде фаза и энергия плоской электромагнитной волны распространяются в противоположных направлениях. В этой связи укажем, что стрелки лучей, изображенных на рис. 7.1, указывают направление распространения энергии. Что касается направления увеличения фазы, то для левой среды направление стрелки луча 3 нужно изменить на противоположное.

В квантовой теории электромагнитного поля волновой вектор электромагнитной волны связан с импульсом фотона соотношением  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ . Поэтому направление распространения энергии фотона и его импульс в левой среде направлены в противоположные стороны. Отсюда вытекает возможность «светового притяжения» в левой среде вместо известного светового давления, имеющего место в обычных (правых) средах.

Рассмотрим теперь преломление плоской монохроматической волны при пересечении границы раздела сред с различными восприимчивостями. Из уравнений Максвелла (7.4) – (7.5) следует непрерывность тангенциальных составляющих векторов напряженности

электрического и магнитного полей при переходе излучения из одной среды в другую:

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}, \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}. \quad (7.13)$$

Отсюда в частности следует, что тангенциальные составляющие полей не изменяют своего направления при переходе излучения между средами с одинаковой и с различной «правизной». Из уравнений Максвелла для индукций электрического и магнитного полей следует непрерывность нормальных составляющих индукции при переходе из одной среды в другую:

$$\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}, \quad \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}. \quad (7.14)$$

Равенства (7.14) говорят о том, что при переходе электромагнитного излучения между средами с различной правизной, помимо изменения модуля, знак нормальной компоненты напряженности электрического и магнитного полей меняется на противоположный.

Таким образом, при преломлении света на границе раздела сред с различной правизной напряженности полей изменяются по величине и *зеркально отражаются относительно границы раздела сред*, как это следует из равенств (7.13) – (7.14).

Зеркальному отражению векторов напряженностей электрического и магнитного полей относительно границы раздела сред при изменении правизны вещества отвечает зеркальное отражение волнового вектора во второй среде относительно нормали к границе раздела, как это показано на рис. 7.4 для случая поляризации электромагнитной волны в плоскости падения на примере напряженности электрического поля. Аналогичное отражение справедливо и для магнитного поля. Необходимость такого отражения вытекает из поперечности электромагнитного поля электромагнитной волны, способной распространяться и в вакууме. Нештрихованные величины (рис. 7.4) отвечают второй среде с той же правизной, что и первая среда, штрихованные величины соответствуют изменению правизны вещества при переходе из одной среды в другую.

Изменение волнового вектора  $\mathbf{k}_2 \rightarrow \mathbf{k}_2'$ , показанное на рис. 7.4, соответствует изменению направления преломленного луча  $4 \rightarrow 3$  (рис. 3.1) при переходе от обычной среды к среде с отрицательным

показателем преломления. Напомним, что изменение хода преломленного луча  $4 \rightarrow 3$  согласуется с законом Снеллиуса (7.1).

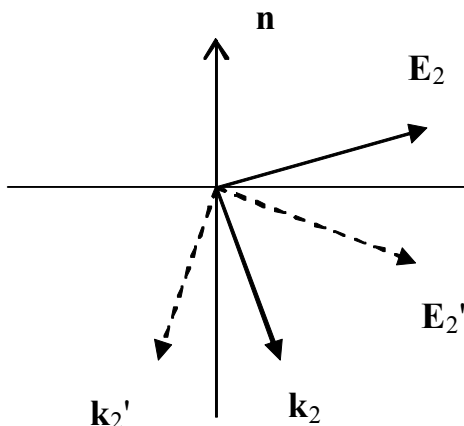


Рис. 7.4. Зеркальное отражение напряженности электрического поля и волнового вектора электромагнитной волны при переходе к среде с другой правизной в случае поляризации электромагнитной волны в плоскости падения

Таким образом, одновременная замена знака у диэлектрической и магнитной проницаемостей вещества с плюса на минус действительно отвечает изменению знака показателя преломления с плюса на минус. С использованием параметра правизны первой и второй сред  $p_{1,2}$  закон Снеллиуса (7.1) можно переписать через диэлектрические и магнитные восприимчивости в виде

$$\frac{\sin \psi}{\sin \phi} = \frac{p_1}{p_2} \left| \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}} \right|. \quad (7.15)$$

Из-за особенности преломления электромагнитной волны в левом веществе, изображенной на рис. 7.1 лучами  $1 \rightarrow 3$ , нетрудно показать, что выпуклая линза из левого вещества в вакууме рассеивает свет, а вогнутая линза из левого вещества собирает излучение в вакууме.

Сделаем замечание принципиального характера о том, что в левых средах диэлектрическая и магнитная проницаемость вещества должна обладать частотной дисперсией, т.е. должна иметь место зависимость от частоты  $\varepsilon(\omega)$  и  $\mu(\omega)$ . Действительно, если таковой зависимости нет, то формула для плотности энергии электромагнитного поля имеет вид

$$W = \frac{\varepsilon E^2 + \mu H^2}{8\pi}. \quad (7.16)$$

Отсюда следует, что при одновременном выполнении неравенств  $\varepsilon < 0$ ,  $\mu < 0$  энергия электромагнитного поля отрицательна, что противоречит физическому смыслу. В диспергирующей среде плотность энергии монохроматической электромагнитной волны описывается выражением

$$W = \frac{1}{8\pi} \left\{ \frac{\partial(\omega \varepsilon(\omega))}{\partial \omega} E^2 + \frac{\partial(\omega \mu(\omega))}{\partial \omega} H^2 \right\}, \quad (7.17)$$

которое может быть положительным и при одновременной отрицательности диэлектрической и магнитной проницаемостей. Производные по частоте, фигурирующие в правой части равенства (7.17), положительны, если проницаемости вещества описываются, например, плазмоподобными формулами

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{A_e}{\omega^2}, \quad \mu(\omega) = 1 - \frac{A_m}{\omega^2}, \quad (7.18)$$

где  $A_{e,m} > 0$ . Легко убедиться, что в этом случае

$$\frac{\partial(\omega \varepsilon(\omega))}{\partial \omega} = 1 + \frac{A_e}{\omega^2} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial(\omega \mu(\omega))}{\partial \omega} = 1 + \frac{A_m}{\omega^2} > 0$$

для всех частот. В то же время в диапазоне  $\omega < A_e$ ,  $A_e$  обе проницаемости отрицательны. Таким образом, в случае справедливости формул (7.18) существует диапазон частот, в котором среда является левой, а энергия электромагнитного поля при этом положительна.

Выше отмечалось, что закон Снеллиуса (7.1) справедлив и для метаматериалов с отрицательным преломлением, если учесть знак

коэффициента преломления среды. Это же утверждение относится к эффекту Доплера и Вавилова–Черенкова.

В общем случае эффект Доплера представляет собой изменение частоты периодического процесса при переходе из одной системы отсчета в другую. Изменение частоты электромагнитной волны, распространяющейся в веществе вследствие эффекта Доплера, дается следующими равенствами:

$$\omega' = (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\gamma = \gamma\omega\left(1 - n\frac{\mathbf{s}\mathbf{v}}{c}\right), \quad (7.19)$$

где  $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$  – коэффициент преломления среды,  $\mathbf{s} = c\mathbf{k}/n\omega$  – единичный вектор,  $\mathbf{v}$  – относительная скорость источника и приемника электромагнитных волн. Фактор Лоренца  $\gamma = \left(1 - (v/c)^2\right)^{-1/2}$

описывает релятивистский эффект сокращения временного промежутка при переходе из одной системы отсчета в другую. Из формулы (7.19) следует, что, если в обычной среде ( $n > 0$ ) источник и приемник движутся навстречу друг к другу ( $\mathbf{s}\mathbf{v} < 0$ ), частота излучения, регистрируемая приемником  $\omega'$ , оказывается больше частоты излучения в системе отсчета, связанной с источником  $\omega$ . В противоположном случае, когда  $\mathbf{s}\mathbf{v} > 0$ , частота в системе отсчета приемника уменьшается. Если излучение распространяется в левой среде ( $n < 0$ ), то в соответствии с формулой (7.19) все происходит наоборот: частота уменьшается при движении приемника и источника навстречу друг к другу, т.е. имеет место обращенный эффект Доплера.

Для описания эффекта Вавилова–Черенкова в метаматериале с отрицательным преломлением можно также пользоваться обычными формулами, в которых фигурирует показатель преломления вещества  $n$ , с учетом того, что  $n = -|n|$  ( $|n| > 1$ ). Так, в среде с  $n < -1$  угол между скоростью частицы и направлением потока энергии в излучаемой ею электромагнитной волне дается равенством

$$\theta_{Ch} = \arccos\left(\frac{c}{n(\omega)\mathbf{v}}\right) = \pi - \arccos\left(\frac{c}{|n(\omega)|\mathbf{v}}\right), \quad (7.20)$$

где  $V$  – скорость частицы и  $v > c/|n|$  – черенковское условие. Таким образом, в левой среде черенковское излучение (соответствующий вектор Пойтинга (7.12)) будет направлено под тупым углом к скорости частицы (полагаем, что  $c/|n| \approx 1$ ). Хорошо известно, что в обычных средах черенковское излучение испускается под острым углом к скорости заряженной частицы. Таким образом, в левой среде эффект Вавилова–Черенкова так же, как и эффект Доплера, является обращенным. Формула для энергии черенковского излучения в левой среде остается прежней, поскольку в нее входит квадрат показателя преломления.

На рис. 7.5 изображены волновые векторы и векторы Пойтинга для излучения Вавилова–Черенкова в правой среде (а) и в левой среде (б). Видно, что во втором случае угол излучения тупой и векторы  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{S}$  антипараллельны.

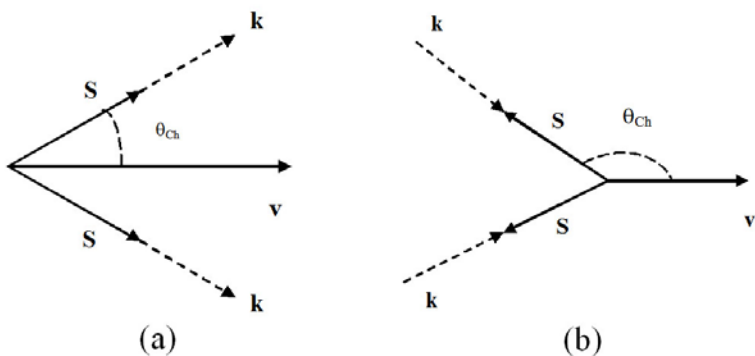


Рис. 7.5. Излучение Вавилова–Черенкова в правой среде (а) и в левой среде (б)

В общем случае среды с произвольной правизной преобразуются формулы Френеля, описывающие изменение компонент электромагнитного поля при пересечении границы раздела сред. Обычно эти формулы записываются в т.н. немагнитном приближении, в котором считается, что магнитная проницаемость вещества равняется единице:  $\mu = 1$ . Тогда в выражении для показателя преломления остается только диэлектрическая проницаемость вещества:  $n = \sqrt{\epsilon}$ . В мета-

материалах с отрицательным преломлением магнитная (как и диэлектрическая) проницаемость отрицательна  $\mu < 0$ , поэтому немагнитное приближение несправедливо. В общем случае для получения правильных выражений в «немагнитных» формулах Френеля нужно производить замену  $n \rightarrow 1/z$ , где  $z = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  – волновое сопротивление среды. Так, например, коэффициент отражения излучения при нормальном падении на границу раздела двух материалов запишется в виде

$$r = \frac{z_2 - z_1}{z_2 + z_1}. \quad (7.21)$$

Очевидно, что в случае  $\mu = 1$  равенство (7.21) переходит в формулу немагнитного приближения:

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}. \quad (7.22)$$

Подчеркнем, что соотношение (7.22) «не работает», если одна из сред является метаматериалом с отрицательным преломлением, в то время как выражение (7.21) справедливо для сред с произвольной правизной.

Из (7.21), в частности, следует, что условием отсутствия отраженной волны ( $r = 0$ ) является равенство волновых сопротивлений обеих сред  $z_2 = z_1$ .

Важно подчеркнуть, что в отличие от показателя преломления, который меняет знак при переходе от положительных значений диэлектрической и магнитной проницаемостей к отрицательным значениям, волновое сопротивление среды при таком переходе знака *не изменяет*, т.е. остается положительной величиной. Из этого обстоятельства следует интересная возможность реализации прохождения электромагнитной волны с *произвольной* поляризацией через границу раздела сред, когда отраженной волны нет, а преломленная волна присутствует. Это возможно, если в первой среде проницаемости имеют положительные значения  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\mu_1 > 0$ , а во второй среде они равны  $\varepsilon_2 = -\varepsilon_1$  и  $\mu_2 = -\mu_1$ . Действительно, в таком случае

$z_1 = z_2$ , и отраженная волна согласно (7.21) отсутствует. В соответствии с законом Снеллиуса (7.1) угол преломления в рассматриваемом случае равен углу падения с обратным знаком:  $\psi = -\phi$ , поскольку  $n_1/n_2 = -1$ . Отсюда вытекает, что преломленная волна распространяется по пути 1–3 (см. рис. 7.1) и не совпадает с падающей волной.

Отметим, что в рассмотренном примере отраженная волна отсутствует для любого угла падения и произвольной поляризации электромагнитного излучения. Если оба материала обычные, то отраженная волна отсутствует, только если излучение поляризовано в плоскости падения, а угол падения равняется углу Брюстера.

Выражение для угла Брюстера в общем случае веществ с произвольной правизной имеет вид

$$\phi_B = \arctg \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right) \frac{\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1}}. \quad (7.23)$$

Очевидно, что в немагнитном приближении ( $\mu_{1,2} = 1$ ) формула (7.23) редуцируется к привычному выражению  $\phi_B = \arctg(n_2/n_1)$ .

Одно из возможных применений метаматериалов с произвольным показателем преломления (положительным и отрицательным) представлено на рис. 7.6 [13]. На нем показан ход лучей, преломляющихся на оболочке из метаматериала, заключенной между concentрическими сферами с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , много большими длины волны излучения. Профиль коэффициента преломления в метаматериале подобран таким образом, что плоскопараллельный пучок лучей после рефракции на оболочке снова превращается в плоскопараллельный. Такой выбор зависимости коэффициента преломления от координаты возможен в предположении возможности изготовления метаматериала с соответствующим профилем коэффициента преломления. Если теперь поместить предмет во внутреннюю сферу (с радиусом  $R_1$ ), то он окажется невидимым на длине волны излучения. Таким образом, с помощью метаматериала можно реализовать «шапку-невидимку», по крайней мере, в заданном диапазоне длин волн.



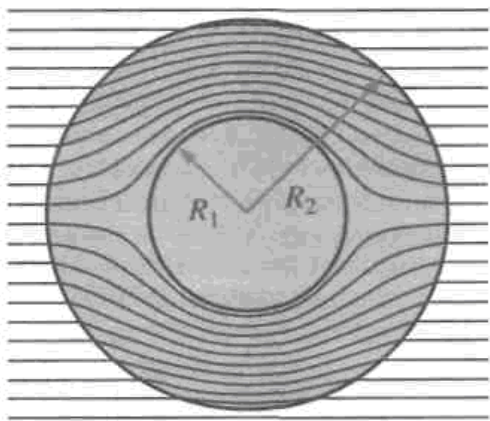


Рис. 7.6. Маскировка предмета, находящегося внутри сферы радиуса  $R_1$ , с помощью рефракции излучения на оболочке из метаматериала, занимающего объем между сферами  $R_1$  и  $R_2$  [13]

### 7.3. Композитные материалы с отрицательным преломлением

Природные материалы с отрицательным преломлением к настоящему времени не обнаружены, поэтому принципиальную важность имеет вопрос об их искусственном изготовлении. Без решения данной проблемы вышеизложенные теоретические соображения оказываются беспредметными. Современный всплеск интереса к левым средам возник после опубликования работы [14], в которой была экспериментально продемонстрирована композитная среда с отрицательными диэлектрической и магнитной проницаемостью. Напомним, что пионерская работа В.Г. Веселаго, посвященная электродинамике левых сред [12], вышла еще в 1967 г. и целых 33 года оставалась без должного внимания именно в силу отсутствия соответствующего материала.

Рассмотрим принципиальные моменты технологии изготовления метаматериалов с отрицательным значением показателя преломления. Как было показано выше, для реализации отрицательных значений показателя преломления необходимо, чтобы диэлектрическая и маг-

нитная проницаемость среды одновременно были отрицательными величинами. Что касается диэлектрической проницаемости, то ее отрицательность характерна для случая плазмы в области низких частот. Это следует из «плазменной» формулы для  $\varepsilon(\omega)$ , которая (в пренебрежении поглощением электромагнитного поля в веществе) имеет вид

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (7.24)$$

Очевидно, что для малых частот  $\omega < \omega_p$  ( $\omega_p$  – плазменная частота) имеем требуемое неравенство на диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon(\omega) < 0$ . Отметим, что если при этом магнитная проницаемость положительная (в частности,  $\mu = 1$ ), то показатель преломления является мнимой величиной, а это приводит к затуханию электромагнитной волны в среде.

Выражение (7.24) описывает такие природные среды как ионосферная и твердотельная плазмы. Оказывается, что можно создать искусственную среду, эффективная диэлектрическая проницаемость которой в далеком инфракрасном и более низкочастотном диапазонах дается формулой (7.24). (Прилагательное «эффективная» говорит о том, что соответствующая величина введена по аналогии со своим прототипом для характеристики процессов на больших пространственных масштабах, когда композитная среда может рассматриваться как сплошная.) Такое вещество может быть использовано, например, для лабораторного исследования электромагнитных свойств ионосферы. Простейшая реализация указанной среды представляет собой периодическую структуру из проволочных кубиков в предположении, что длина ребра куба ( $a$ ) много меньше длины волны излучения  $a \ll \lambda$ , а радиус проволоки ( $r$ ) много меньше длины ребра  $r \ll a$ . Для данной структуры эффективная плазменная частота, фигурирующая в равенстве (7.4), равна

$$\omega_p^{(eff)} = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{2\pi}{\ln(a/r)}} \quad (7.25)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме. Напомним, что обычное выражение для плазменной частоты имеет вид

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n}{m}}. \quad (7.26)$$

Формула (7.25) получается из (7.26) путем замены концентрации ( $n$ ) и массы электронов на эффективные значения этих величин:  $n \rightarrow n_{\text{eff}} = n\pi(r/a)^2$ ,  $m \rightarrow m_{\text{eff}} = 2\pi e^2 r^2 c^{-2} n \ln(a/r)$ . Эффективное значение концентрации имеет простое геометрическое происхождение, а эффективное значение массы электрона учитывает самоиндукцию в рассматриваемой периодической структуре. Для радиуса проволоки  $r = 1$  мкм и длины ребра куба  $d = 5$  мм формула (7.25) дает  $\omega_p^{(\text{eff})}/2\pi = 8,2$  ГГц. Очевидно, что для больших значений длины ребра куба плазменная частота в соответствии с формулой (7.25) будет меньше. Таким образом, изменяя параметры искусственной проволоочной структуры, можно управлять значением эффективной плазменной частоты и соответственно эффективной диэлектрической проницаемостью среды.

Для реализации левой среды важно получить отрицательное значение магнитной проницаемости. Этого можно добиться, если использовать в качестве структурной единицы композитной среды двойной кольцевой резонатор с разрезом, схематическое изображение которого представлено на рис. 7.6. Из-за важной роли такого резонатора в технологии метаматериалов он иногда называется «атомом фотоники». Из рис. 7.6 видно, что двойной резонатор с разрезом состоит из двух металлических колец, вставленных одно в другое, с разрезами, расположенными напротив друг друга. Разрезы необходимы для увеличения резонансной длины волны, а промежутки между кольцами служат для уменьшения резонансной частоты (за счет увеличения емкости) и для концентрации внутри него электрического поля.

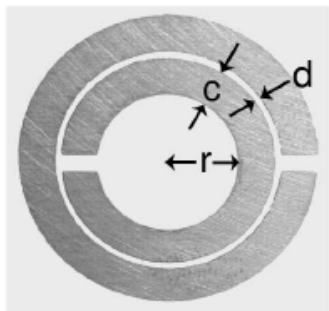


Рис. 7.6. Двойной кольцевой резонатор с разрезом

Резонатор эффективно взаимодействует с внешним переменным магнитным полем, вектор напряженности которого перпендикулярен плоскости резонатора. Это поле наводит в проводящих кольцах токи, которые в свою очередь создают магнитное поле, направленное антипараллельно внешнему магнитному полю. В результате в рассматриваемом резонаторе возникает диамагнитный отклик на внешнее электромагнитное воздействие.

На рис. 7.7 представлен одинарный кольцевой резонатор с разрезом в виде эквивалентного LC контура.

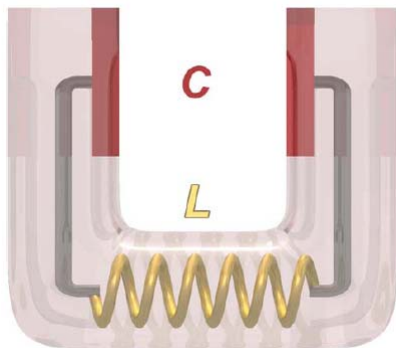


Рис. 7.7. Представление одинарного кольцевого резонатора с разрезом в виде LC контура

На длинах волн, много больших размера резонатора, вышеописанный процесс может быть описан с помощью эффективной магнитной проницаемости. Для периодического массива из двойных кольцевых резонаторов с разрезом, являющегося искусственной кристаллической решеткой, эффективная магнитная проницаемость дается выражением

$$\mu_{\text{eff}}(\omega) = 1 + \frac{f \omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad (7.27)$$

где  $f = \pi(r/a)^2$  – коэффициент заполнения единичной ячейки рассматриваемой периодической структуры,  $a$  – параметр решетки,  $r$  – радиус внутреннего кольца,  $\omega_0 = (c/\pi)\sqrt{3d/\varepsilon r^3}$  – резонансная частота,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды, в которую помещен резонатор,  $d$  – ширина промежутка между кольцами,  $\omega_{\text{mp}} = \omega_0/\sqrt{1-f}$  – магнитная плазменная частота.

Резонансная частота двойного кольцевого резонатора с разрезом, изображенного на рис. 7.8, для  $c = 0,8$  мм,  $d = 0,2$  мм и  $r = 1,5$  мм равна 4.85 ГГц, а добротность в случае колец из меди превышает 600 (см. рис. 7.8 из пионерской работы Д.Смита с соавторами [14]).

Равенство (7.27) по форме аналогично выражению для диэлектрической проницаемости поляритонов (см. Гл.2), которое было использовано для описания дисперсии поляритонов, с точностью до замены  $f \rightarrow f_0(\omega_{\text{pc}}/\omega)^2$  и  $1 \rightarrow \varepsilon_\infty$  ( $f_0$  – сила осциллятора,  $\omega_{\text{pc}} = \sqrt{4\pi e^2 N_c/m}$  – аналог плазменной частоты,  $N_c$  – концентрация активных центров).

Вблизи резонансной частоты  $\omega \cong \omega_0$  магнитная проницаемость среды, представляющей собой периодический массив кольцевых резонаторов с разрезом, может принимать большие (по модулю) значения (см. (7.27)). Таким образом, материал, образованный из немагнитных составных элементов, обнаруживает ярко выраженные магнитные свойства. Такое вещество называется *искусственным магнетиком*.

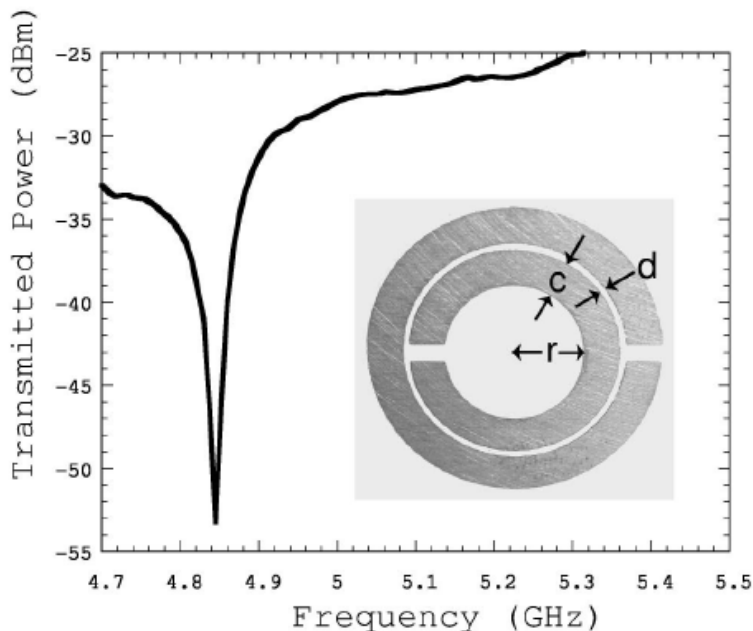


Рис. 7.8 Резонансная кривая медного кольцевого резонатора с разрезом ( $r=0,8$  мм,  $d=0,2$  мм,  $c=1,5$  мм) из статьи [14]

Заметим, что известные природные материалы на гигагерцовых частотах и выше не проявляют магнитных свойств, так что  $\mu = 1$ . Это связано со слабостью взаимодействия магнитного поля с атомами, составляющими обычное вещество. Данное обстоятельство следует из того факта, что магнитная составляющая силы Лоренца, действующей на атомные электроны, примерно в 137 раз меньше электрической составляющей из-за множителя  $v_a/c \approx e^2/\hbar c \cong 1/137$ , равного постоянной тонкой структуры. Поэтому для получения отрицательного преломления, необходимым условием которого является отрицательность  $\mu$ , нужно использовать искусственные «атомы» типа вышеописанного кольцевого резонатора с разрезом.

Из формулы (7.27) следует, что в диапазоне  $\omega_0 < \omega < \omega_{mp}$  магнитная проницаемость композитной среды, представляющей собой

периодический массив кольцевых резонаторов с разрезом, *отрицательна*. Дисперсионная зависимость  $\omega(k)$  ( $\omega$  – частота,  $k$  – модуль волнового вектора) на этих частотах будет иметь запрещенную зону (или стоп-зону), если  $\varepsilon(\omega) > 0$ , что следует из соотношения  $\omega = kc / \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$ . В диапазонах  $\omega < \omega_0$  и  $\omega_{mp} < \omega$  волновой вектор является действительной величиной, и среда прозрачна для электромагнитных волн. Этому соответствует две ветви дисперсионной зависимости, аналогичные двум кривым, приведенным на рис. 2.2 при рассмотрении поляритонов в сплошной среде. Чтобы реализовать левую среду, нужно условие отрицательности магнитной проницаемости в стоп-зоне дополнить условием отрицательности диэлектрической проницаемости. Это можно сделать, если магнитный кольцевой резонатор с разрезом (рис. 7.6) дополнить электрическим резонатором, представляющим собой прямой отрезок металлической проволоки, ориентированный вдоль вектора напряженности электрического поля, как это показано на рис. 7.9. Вектор напряженности магнитного поля направлен по нормали к плоскости кольцевого резонатора увеличения магнитной связи.

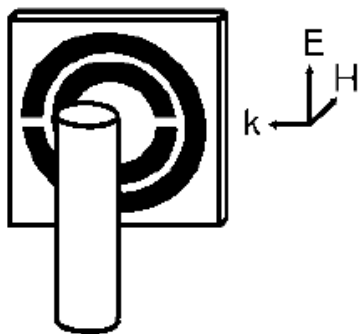


Рис. 7.9. Магнитный кольцевой резонатор с разрезом, дополненный электрическим резонатором в виде прямого отрезка проводника, и соответствующая ориентация компонент электромагнитного поля

Для структуры, представленной на рис. 3.9, связь между модулем волнового вектора и частотой описывается выражением

$$k^2 = \frac{(\omega^2 - \omega_p^2)}{c^2} \frac{(\omega^2 - \omega_{mp}^2)}{(\omega^2 - \omega_0^2)}, \quad (7.28)$$

где  $\omega_p \propto d^2 \sqrt{L}$  – эффективная плазменная частота электронов в прямом отрезке металлической проволоки,  $L$  – коэффициент самоиндукции на единицу длины,  $d$  – длина отрезка проводника,  $\omega_{mp} = \omega_0 / \sqrt{1-f}$  – магнитная плазменная частота,  $\omega_0$  – резонансная частота кольцевого резонатора с разрезом,  $0 < f < 1$  – коэффициент, описывающий заполнение плоскости резонатора проводящим материалом колец. Равенство (7.28) является следствием формул (7.24), (7.27) и соотношения  $\omega = k c / \sqrt{\varepsilon(\omega) \mu(\omega)}$ .

Из дисперсионного выражения (7.28) вытекает, что при условии  $\omega_p > \omega_{mp}$  волновой вектор электромагнитной волны в прежде запрещенной зоне  $\omega_0 < \omega < \omega_{mp}$  становится действительной величиной. При этом диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, составленной из структурных единиц, приведенных на рис. 7.9, в частотном интервале  $\omega_0 < \omega < \omega_{mp}$  имеют отрицательные значения.

Первый метаматериал с отрицательной диэлектрической и магнитной проницаемостями на основе структуры, изображенной на рис. 3.9, был продемонстрирован в работе Д. Смита с соавторами [14]. Эффект отрицательного преломления в этой статье был зафиксирован в частотном интервале от 4.8 до 5.1 ГГц. Искусственная периодическая структура, состоящая из кольцевых резонаторов с прорезью и прямых отрезков проводника, позволяющая получить отрицательное преломление в гигагерцовом диапазоне частот, изображена на рис. 7.10.

После того, как было продемонстрировано отрицательное преломление в гигагерцовом диапазоне частот, начали предприниматься усилия для получения данного эффекта в инфракрасной и видимой области спектра. Основная трудность на этом пути заключалась в получении отрицательного значения магнитной восприимчивости. Как видно из выражения для резонансной частоты двойного кольцевого



резонатора с разрезом  $\omega_0 = (c/\pi)\sqrt{3d/\varepsilon r^3}$ , в предположении  $d \ll r$  данная частота возрастает обратно пропорционально размеру резонатора  $r$ . Таким образом, для перехода из гигагерцового в оптический диапазон размер резонатора должен быть уменьшен почти в миллион раз. На самом деле вышеописанный скейлинг справедлив вплоть до частоты 200 ТГц. На более высоких частотах металл, из которого изготовлен резонатор, нельзя рассматривать как идеальный проводник. Действительно, с ростом частоты при выполнении неравенства (4.34) металл начинает проявлять диэлектрические свойства. В процессе перехода в оптический диапазон по причине большей простоты изготовления двойной резонатор с разрезом был заменен на одинарный (см. рис. 7.11).



Рис. 7.10. Искусственная периодическая среда, позволяющая получить эффект отрицательного преломления

Оказалось, что в нанометровом масштабе трудно изготовить трехмерную структуру, изображенную на рис. 7.9, поэтому был разработан альтернативный дизайн метаматериала с отрицательным преломлением. Новый подход базировался на том факте, что пара металлических проволок или пластин, разделенных диэлектрическим промежутком, может обеспечить магнитный резонанс, необходимый для получения отрицательного значения магнитной проницаемости. Этот магнитный резонанс возникает вследствие антипараллельного тока в проволочной паре, при котором на концах проволок аккумулируется заряд разного знака. Кроме магнитного резонанса в рассматриваемой

структуре возникает также электрический резонанс, приводящий к отрицательному значению диэлектрической проницаемости, что необходимо для отрицательного преломления среды. Однако, пересечения спектральных областей двух резонансов оказалось трудно достичь. Для устранения данного недостатка была разработана наноструктура, которая называется двойная «рыболовная сеть». Она состоит из пары металлических «рыболовных сетей», разделенных диэлектрическим промежутком. Данная структура изображена в правом нижнем углу рис. 7.11.

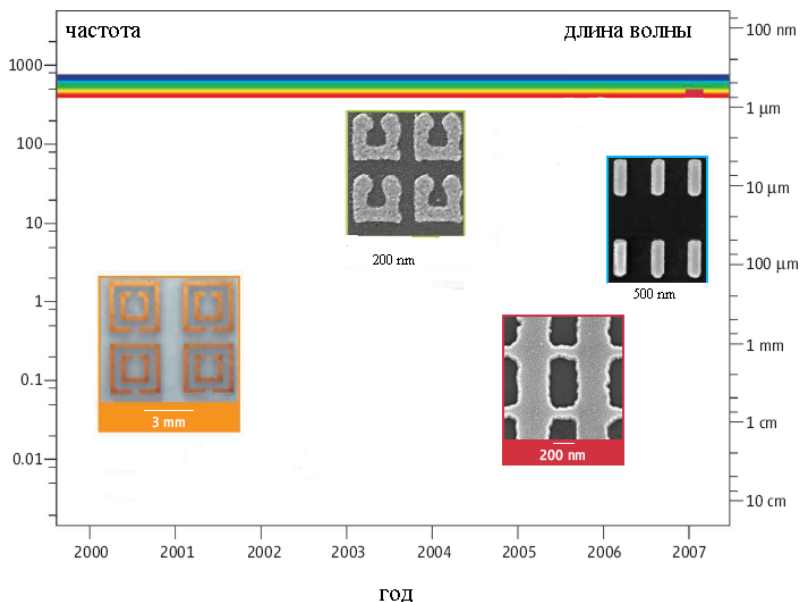


Рис. 7.11. Развитие технологии метаматериалов

Достоинство «рыболовной сети» по сравнению со структурой, представленной на рис. 7.10, состоит также в том, что электромагнитная волна падает перпендикулярно плоскости образца, а не вдоль его поверхности, как в случае кольцевого резонатора с разрезом, что существенно облегчает проведение соответствующих экспериментов.

## 7.4. Другие типы метаматериалов

### *Бианизотропные среды*

Другим примером метаматериалов являются *бианизотропные среды*, в которых электрическая индукция зависит не только от электрического, но и от магнитного поля так же, как магнитная индукция, являющаяся функцией напряженностей магнитного и электрического полей. Материальные уравнения в общем случае бианизотропной среды имеют вид

$$\mathbf{D} = \hat{\varepsilon} \mathbf{E} + \hat{\alpha} \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \hat{\mu} \mathbf{H} + \hat{\beta} \mathbf{E}. \quad (7.29)$$

В равенства (7.29) помимо тензора диэлектрической  $\hat{\varepsilon}$  и магнитной  $\hat{\mu}$  проницаемостей входят также тензоры  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\beta}$ , описывающие магнитоэлектрическую связь. Данные тензоры называются тензорами *магнитоэлектрической проницаемости*.

Материальные уравнения (7.29) обобщают ранее рассмотренный случай изотропной среды, когда связь между индукцией и напряженностью поля дается выражениями (7.8) – (7.9), в которых  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon \delta_{ij}$ ,  $\mu_{ij} = \mu \delta_{ij}$ ,  $\alpha_{ij} = 0$ ,  $\beta_{ij} = 0$ .

Наличие в  $\mathbf{D}$  слагаемого, пропорционального  $\mathbf{H}$  означает, что ток, индуцируемый переменным магнитным полем в элементах, образующих среду, вызывает не только магнитный дипольный момент, но и электрический дипольный момент. Аналогично, переменное электрическое поле индуцирует в таких элементах ток, который создает как электрический, так и магнитные дипольные моменты, поэтому не только  $\mathbf{D}$ , но и  $\mathbf{B}$  содержит слагаемое, пропорциональное  $\mathbf{E}$  [15].

Как видно из равенств (7.29), бианизотропная среда характеризуется большим числом параметров, содержащихся в четырех тензорах проницаемостей. Всего имеется  $4 \times 9 = 36$  комплексных параметров, поскольку трехмерный тензор 2-го ранга, каковым являются все вышеприведенные проницаемости, имеет, вообще говоря, 9 компонент. В случае среды с определенным типом симметрии число независимых компонент тензоров проницаемости может быть меньше 9.

Классификация типов сред в зависимости от вида тензоров  $\hat{\varepsilon}$ ,  $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\beta}$  приведена в Таблице 7.1 [15].

Т а б л и ц а 7.1

тип среды	$\hat{\varepsilon}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$
изотропная	$\varepsilon \delta_{ij}$	$\mu \delta_{ij}$	0	0
киральная	$\varepsilon \delta_{ij}$	$\mu \delta_{ij}$	$\alpha \delta_{ij}$	$-\alpha \delta_{ij}$
биизотропная	$\varepsilon \delta_{ij}$	$\mu \delta_{ij}$	$\alpha \delta_{ij}$	$\beta \delta_{ij}$
анизотропная	$\varepsilon_{ij}$	$\mu_{ij}$	0	0
бианизотропная	$\varepsilon_{ij}$	$\mu_{ij}$	$\alpha_{ij}$	$\beta_{ij}$
гиротропная	$\varepsilon_1 \delta_{ij} + \varepsilon_2 e_{ijk} u_k$	$\mu_1 \delta_{ij} + \mu_2 e_{ijk} u_k$	0	0
бигиротропная	$\varepsilon_1 \delta_{ij} + \varepsilon_2 e_{ijk} u_k$	$\mu_1 \delta_{ij} + \mu_2 e_{ijk} u_k$	$\alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 e_{ijk} u_k$	$\beta_1 \delta_{ij} + \beta_2 e_{ijk} u_k$
одноосная	$\varepsilon_1 \delta_{ij} + \varepsilon_2 u_i u_j$	$\mu_1 \delta_{ij} + \mu_2 u_i u_j$	0	0
одноосная бианизотропная	$\varepsilon_1 \delta_{ij} + \varepsilon_2 u_i u_j$	$\mu_1 \delta_{ij} + \mu_2 u_i u_j$	$\alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 u_i u_j$	$\beta_1 \delta_{ij} + \beta_2 u_i u_j$
двухосная	$\varepsilon_1 \delta_{ij} + \varepsilon_2 u_i u_j + \varepsilon_3 v_i v_j$	$\mu_1 \delta_{ij} + \mu_2 u_i u_j + \mu_3 v_i v_j$	0	0
двухосная бианизотропная	$\varepsilon_1 \delta_{ij} + \varepsilon_2 u_i u_j + \varepsilon_3 v_i v_j$	$\mu_1 \delta_{ij} + \mu_2 u_i u_j + \mu_3 v_i v_j$	$\alpha_1 \delta_{ij} + \alpha_2 u_i u_j + \alpha_3 v_i v_j$	$\beta_1 \delta_{ij} + \beta_2 u_i u_j + \beta_3 v_i v_j$
непоглощающая	$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}^*$	$\mu_{ij} = \mu_{ji}^*$	$\alpha_{ij}$	$\alpha_{ji}^*$
взаимная	$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$	$\mu_{ij} = \mu_{ji}$	$\alpha_{ij}$	$-\alpha_{ji}$

В таблице 7.1 использованы следующие обозначения  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $e_{ijk}$  – полностью антисимметричный объект Леви-Чевита,  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  – векторы, задающие направления оптических осей.

Заметим, что в изотропной среде с учетом пространственной дисперсии выражение для тензора диэлектрической проницаемости можно записать в общем виде через продольную  $\varepsilon_l(k, \omega)$  и поперечную  $\varepsilon_{tr}(k, \omega)$  компоненты, которые зависят от модуля волнового вектора и частоты:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_l(k, \omega) + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon_{tr}(k, \omega). \quad (7.20)$$

В пренебрежении пространственной дисперсией, когда исчезает зависимость компонент диэлектрической проницаемости от волнового вектора, имеем  $\varepsilon_l(k \rightarrow 0, \omega) = \varepsilon_{tr}(k \rightarrow 0, \omega) = \varepsilon(\omega)$ . Тогда (7.20) сводится к простой формуле  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{k} \rightarrow 0, \omega) = \delta_{ij} \varepsilon(\omega)$ , отвечающей изотропной среде без пространственной дисперсии.

Особый интерес представляют среды, распространение электромагнитных волн в которых требует учета как электрической, так и магнитной анизотропии. Наиболее характерным в этом плане материалом, проявляющим бигиротропные свойства в инфракрасном диапазоне, является монокристаллический железо-иттриевый гранат  $\text{Y}_3\text{Fe}_5\text{O}_{12}$  и его различные модификации с замещением части ионов иттрия на ионы редкоземельных металлов Bi, Lu, Tb.

Одним из способов реализации бианизотропной среды является создание композиционных материалов, включающих проводящие частицы специальной формы. Примером такой частицы является омега-частица, изображенная на рис. 7.14, которая служит структурным элементом метаматериала, называемого *омега-композитом*.

Омега-частица обеспечивает магнитоэлектрическую связь, причем электрический и магнитный моменты, наведенные в ней электромагнитным полем, перпендикулярны друг к другу. При расположении двух омега-частиц в одной плоскости таким образом, что их прямые участки взаимно перпендикулярны, получается т.н. «шляпка» – структурный элемент одноосной бианизотропной среды.



Рис. 7.14. Омега-частица, используемая при создании бианизотропных материалов

Бианизотропные материалы обладают необычными электромагнитными свойствами, перспективными для создания на их основе неотражающих покрытий, фазовращателей специального типа и других типов преобразователей электромагнитного излучения.

### *Фотонные кристаллы*

К метаматериалам относятся также фотонные кристаллы, представляющие собой среды с периодическим изменением показателя преломления. Свойства фотонных кристаллов описаны в Гл.4. В отличие от рассмотренных выше композитных материалов, в которых размер структурной единицы много меньше длины волны (что позволяло считать их сплошной средой), в фотонных кристаллах пространственный период изменения показателя преломления порядка длины волны излучения. Именно это обстоятельство лежит в основе специфических электромагнитных свойств фотонных кристаллов, одним из которых является наличие запрещенной фотонной зоны. В этой зоне отсутствуют распространяющиеся электромагнитные волны подобно тому, как в запрещенной электронной зоне полупроводников и диэлектриков отсутствуют электронные состояния. Данное свойство может быть использовано для создания оптических волноводных структур, в которых потери, связанные с выходом излучения за пределы волновода, близки к нулю. Кроме того, фотонная запрещенная зона применяется для создания резонаторов с высокой добротностью в заданном спектральном диапазоне.

## Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. – М.: Физматлит, 2003. – 652 с.
2. Meixner A., Bopp M., Tarrach G. Direct measurement of standing evanescent waves with a photon scanning tunneling microscope // Appl. Opt. – 1994 – V. 33. P. 7995.
3. Pohl D.W., Denk W., Lanz M. Optical stethoscopy: image recording with resolution  $\lambda/20$  // Appl. Phys. Lett. – 1984. – V. 44. P. 651–653.
4. Synge E.H. A suggested model for extending microscopic resolution into the ultra-microscopic region // Phil. Mag. – 1928. – V. 6. P. 356–362.
5. И.С. Осадько. Микроскоп ближнего поля как инструмент для исследования наночастиц. Успехи физ. наук. 2010, т. 180, с.83
6. <http://www.edu.ioffe.ru/register/?doc=winter/2002/main/kalit>
7. Durig U., Pohl D.W., Rohner F. Near-field optical scanning microscopy // J. Appl. Phys. – 1986. – V. 59. P. 3318–327.
8. Novotny L., Hecht B. Principles of nano-optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 2007. – 539 P.
9. Yang T.J., Lessard G.A., Quake S.R. An apertureless near-field microscope for fluorescence imaging // Appl. Phys. Lett. – 2000. V. 76. P. 378–380.
10. Raether H. Surface plasmons. – Berlin: Springer, 1988. – 135 p.
11. Ghaemi H. F., Tineke Thio, Grupp D. E. et al. Surface plasmons enhance optical transmission through subwavelength holes // Phys. Rev. B – 1998. V. 58. P. 6779–6782.
12. Веселого В.Г. Электродинамика веществ с одновременно отрицательными значениями  $\epsilon$  и  $\mu$  // УФН. – 1967. Т. 92. С. 517–526.
13. Гуляев Ю.В., Лагарьков А.Н., Никитов С.А. Метаматериалы: фундаментальные исследования и перспективы применений // Вестник РАН. – 2008. Т. 78. С. 438–457.
14. Smith D.R., Padilla W.J., Vier D.C. et al. Composite medium with simultaneously negative permeability and permittivity // Phys. Rev. Lett. – 2000. V. 84. P. 4184–4187.
15. Иванов О. В. Распространение электромагнитных волн в бианизотропных планарных и волоконных слоистых структурах // Диссер-

тация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. – Ульяновск, 2009. – 305 с.